

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ГЕОТЕХНИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ ПО ПЕРВОМУ ПРЕДЕЛЬНОМУ СОСТОЯНИЮ

APPLICATION OF FINITE ELEMENT METHOD TO THE GEOTECHNICAL ULS ANALYSIS

В. Г. ФЕДОРОВСКИЙ, канд. техн. наук

Г. А. БОБЫРЬ, канд. техн. наук

И. А. БОКОВ

С. В. ИЛЬИН

Приводятся примеры решения МКЭ-задач расчета несущей способности оснований, устойчивости откосов и других задач расчета по первой группе предельных состояний. Показывается, что точное решение обеспечивается использованием ассоциированного закона пластического течения и надлежащим разбиением сетки элементов.

The paper includes FEM solutions for some geotechnical ULS designs among them the bearing capacity calculation, the slope stability assessment etc. It turns out that exact solutions are obtained if the associated plastic flow rule and a proper partition of the domain onto FE are used.

Ключевые слова:

Дилатансия, МКЭ, разбиение области на КЭ, расчет по первой группе предельных состояний

Key words:

Dilatancy, FEM, partition of the domain onto FE, ultimate limit state analysis

Сравнительно недавно я спросил Скема (профессора А. Скемптона), что, по его мнению, было самым значительным продвижением в нашей области за его карьеру. Не задумываясь надолго, он сказал: «Численные расчеты». Если задуматься, это самоочевидно. Наша способность обобщать знания о свойствах материалов и сравнивать результаты с натурными наблюдениями изменилась безмерно.

Профессор П. Р. Воан (Импириэл Колледж, Лондон)

Не только виднейший английский геотехник и историк науки сэр Алек Скемpton был впечатлен успехами численных расчетов в механике грунтов (для него это как раз неудивительно, так как он – ученый старой школы и ни к численным методам, ни к современным моделям грунтов в своих моделях не прибегал). Специалисту по прикладной математике это не менее удивительно. Основной метод численного анализа МКЭ исходно разработан применительно к решению краевых задач для уравнений с частными производными эллиптического типа, в частности, для задач теории упругости (линейно-деформируемой среды – ЛДС) или для слабонелинейных задач. Иными словами, применение МКЭ к деформационным расчетам (как правило, по второй группе предельных состояний) не вызывает особых сомнений. Однако при переходе к расчету несущей способности или устойчивости грунтовых массивов, где используется теория идеальной пластичности (теория предельного равновесия – ТПР) ситуация иная: уравнения становятся гиперболическими, решения допускают разрывы, и даже краевые задачи изменяются.

На начальной стадии использования МКЭ в геотехнике действительно ничего похожего на определение несущей способности основания с использованием даже простейшей модели Мора – Кулона не наблюдалось. Однако с развитием МКЭ и переходом от простых конечных элементов к многоузловым оказалось, что МКЭ вполне пригоден при соблюдении некоторых условий для такого рода расчетов. Имеется довольно значительная литература на эту тему, как зарубежная, так и отечественная [1-3].

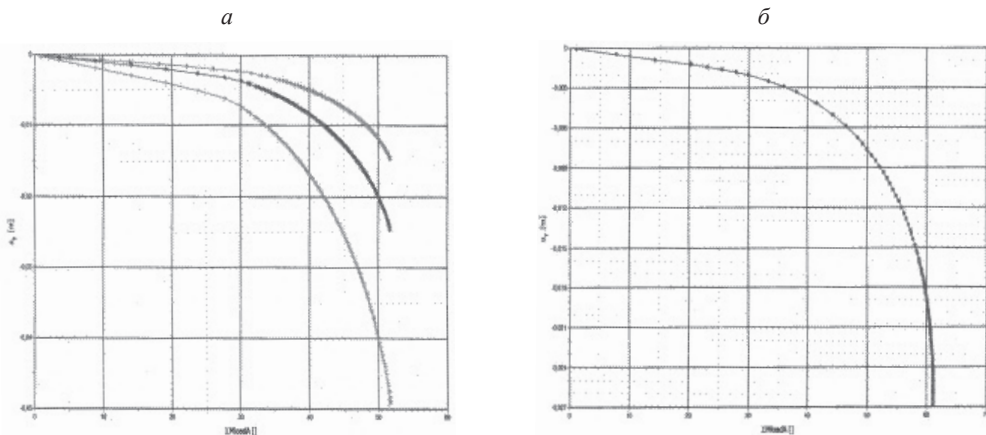


Рис. 1. Графики нагрузка-осадка для ленточного (а) и круглого (б) шероховатых штампов на поверхности связного основания с $\varphi = 0^\circ$. На графике (а) расчеты выполнялись при трех разных модулях деформации $E = 10, 20$ и 40 МПа

Рассмотрим эту ситуации подробнее на примерах.

Задача о штампе на поверхности однородного упруго-идеально-пластического основания классическая. Для грунта с углом внутреннего трения $\varphi = 0^\circ$ как в плоской задаче, так и в осесимметричной график нагрузка – осадка, рассчитанный при помощи известного конечноэлементного комплекса PLAXIS, достигает предела при нагрузке, отличающейся от теоретической лишь в третьем знаке, т.е. погрешность менее 1%.

(рис. 1). При этом результат не зависит от деформационных характеристик (рис. 1, *a*). Последнее подтверждает адекватность общеупотребительного в геотехнике принципа независимости расчетов осадок (по теории ЛДС) и несущей способности (по ТПР).

Для весоной среды с ненулевыми трением и сцеплением ($\varphi = 20^\circ$, $c = 20$ кПа, $\gamma = 20$ кН/м³) результат зависит от принятого угла дилатансии ψ . При $\psi = 20^\circ$, а также при $\psi = 10^\circ$ получается практически точное значение предельной нагрузки и для ленточного фундамента, и для круглого. Но при $\psi = 0^\circ$ срыв происходит при существенно более низкой нагрузке (рис. 2).

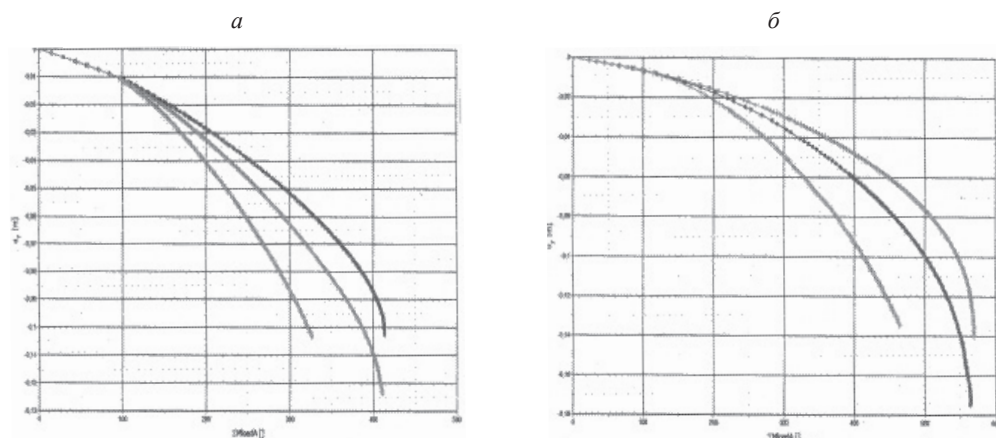


Рис. 2. Графики нагрузка-осадка для ленточного (*a*) и круглого (*б*) шероховатых штампов на поверхности основания общего вида. Статическое нагружение. Углы дилатансии (снизу вверх) $0, 10, 20^\circ$

Для проверки те же задачи пересчитали, заменив статическое нагружение кинематическим. При этом предельная нагрузка осталась неизменной, но по ее достижении график нагрузка-осадка дополнился вертикальным участком (рис. 3). Однако там, где срыв в статике происходит «досрочно», здесь получается негладкий график, свидетельствующий о неустойчивости счета.

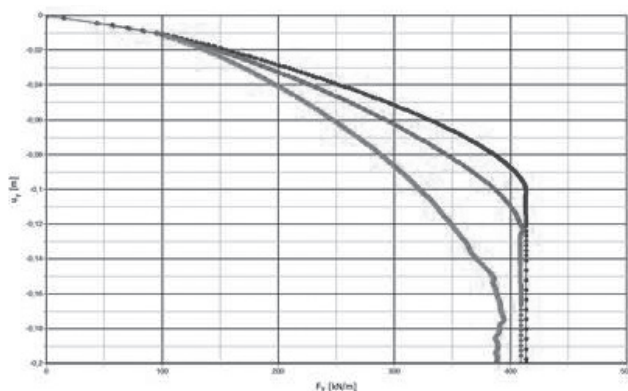


Рис. 3. Графики нагрузка-осадка для ленточного шероховатого штампа на поверхности основания общего вида. Кинематическое нагружение. Углы дилатансии (снизу вверх) $0, 10, 20^\circ$

Более внимательно рассмотрим первый пример (плоская задача, $\varphi = 0^\circ$). Оказывается, что если сетка КЭ получена с измельчением под всем штампом (1-я схема разбиения), эпюра контактных давлений отлична от решения Прандтля (рис. 4). Под большей частью штампа давление составляет около 80% от теоретического, и лишь за счет концентрации у края среднее предельное давление получается правильно. Картина выпора также искажена вблизи края штампа. Если же искусственно измельчить сетку только возле края штампа (2-я схема), результаты становятся чуть лучше (напряжения под штампом увеличиваются до 90% от требуемых, а картина выпора более равномерна), но всё равно отличаются от точных (рис. 5).

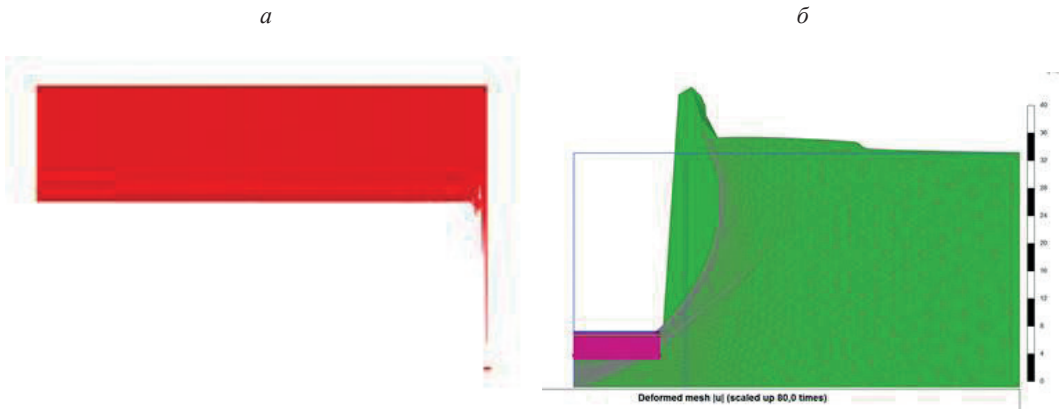


Рис. 4. Эпюра контактных напряжений (a) и деформированная сетка КЭ (б) при разрушении.
1-я схема разбиения области

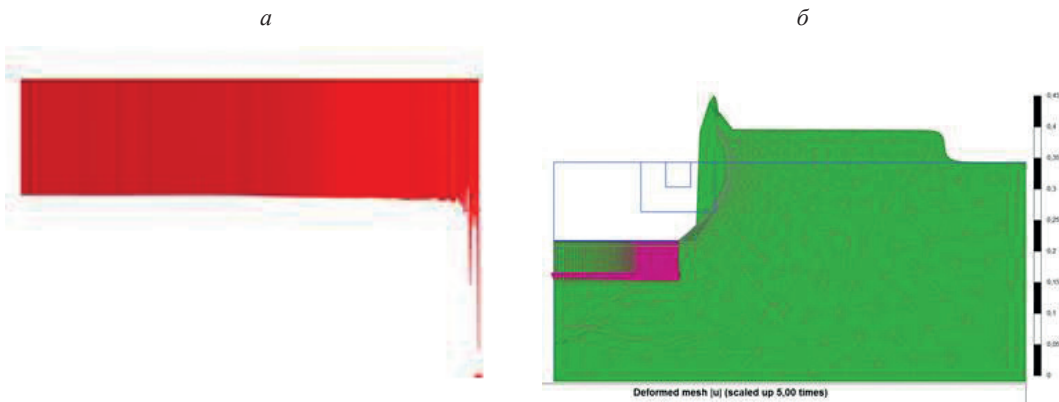


Рис. 5. Эпюра контактных напряжений (a) и деформированная сетка КЭ (б) при разрушении.
2-я схема разбиения области

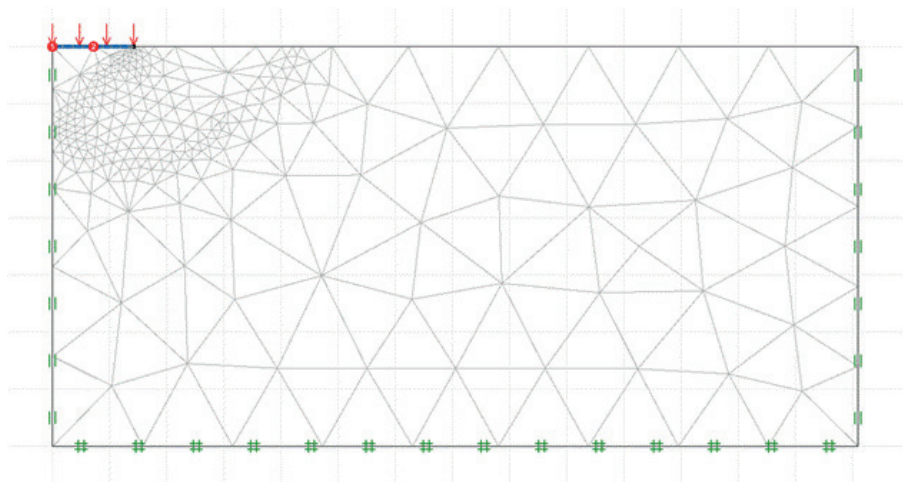
Из этого можно сделать два вывода.

1. Правильный результат расчета p_{ult} связан с тем, что в расчете МКЭ хорошо удовлетворяются условия статической теоремы ТПР, хотя получающаяся картина напряжений и деформаций может быть далека от идеальной.

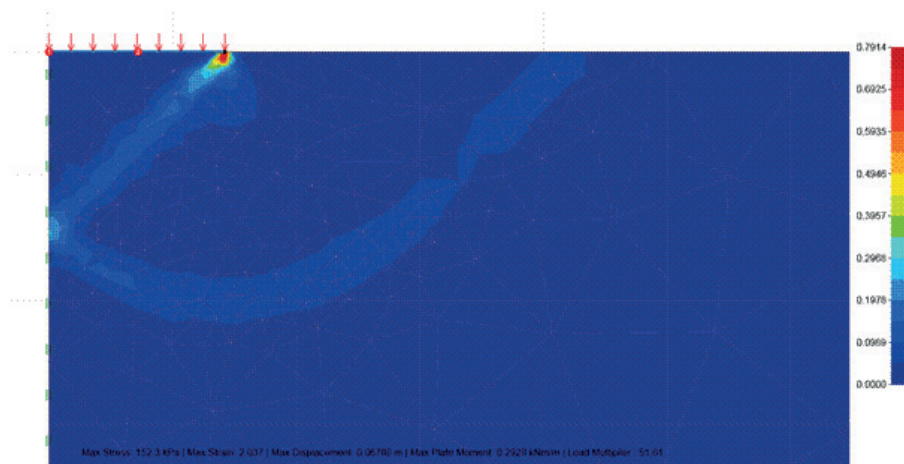
2. Сетку следует измельчать в местах резких изменений (разрывов) поля скоростей.

Последний вывод подтверждается расчетом по программе OPTUM, где имеется возможность автоматической перестройки сетки КЭ (рис. 6). В этой программе сетка КЭ в процессе счета перестраивается (адаптируется), сгущаясь в местах наиболее интенсивных сдвигов. На рис. 6, а видно, что она сгущается вдоль границ ядра под штампом и нижней границы зоны выпора, которые четко видны на рис. 6, б и совпадают с решением Прандтля. В результате решение дает не только точное значение предельного давления p_{ult} , но и равномерную эпюру контактного давления и равномерный выпор сбоку от штампа.

а



б



6

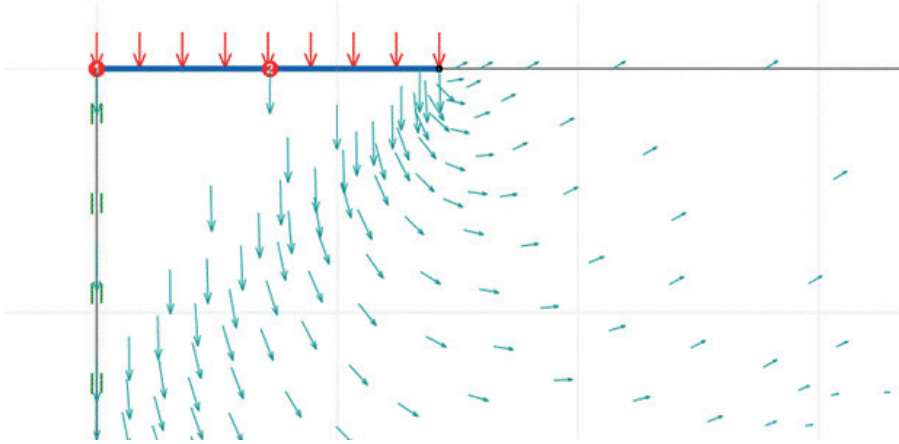


Рис. 6. Решение задачи о несущей способности штампа на основании с $\varphi = 0^\circ$ по программе OPTUM: *a* – сетка КЭ после перестройки (адаптации); *б* – диссипация энергии при сдвиге; *в* – поле скоростей при разрушении основания (в увеличенном масштабе)

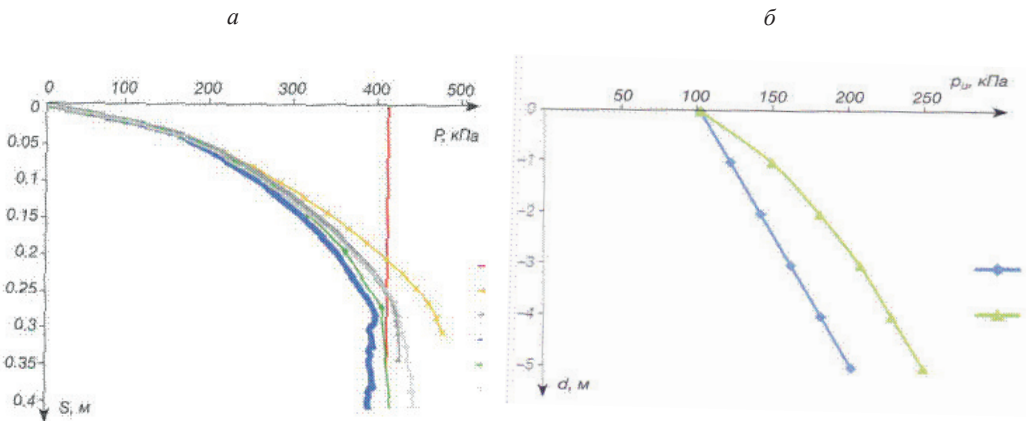


Рис. 7. Расчет ленточного штампа на связном основании согласно [3]: *a* – расчет по различным программам МКЭ; *б* – зависимость несущей способности от глубины заложения

Помимо правильного учета дилатансии, на устойчивость счета и результаты влияет порядок КЭ, т.е. число и расстановка узлов в элементе. На рис. 7, *a*, заимствованном из книги [3], показаны графики нагрузки-осадки для ленточного штампа на основании с характеристиками $\varphi = 20^\circ$, $c = 20$ кПа, $\gamma = 0$, полученные по различным программам МКЭ с использованием элементов 1-го и 2-го порядков. Видно, что для всех программ, кроме PLAXIS (элементы 2-го порядка, график синего цвета), расчетные величины больше теоретического значения. Отметим, что на этом графике «хвост» демонстрирует неустойчивость счета (ср. рис. 3) и связано это с тем, что PLAXIS рекомендует использовать неассоциированный закон пластического течения.

Когда мы сравниваем решения МКЭ с точными, речь идет о решениях методом характеристик, где за последние десятилетия был достигнут значительный прогресс

в области автоматического построения решений. Однако для более сложных задач, например, для задач о заглубленном фундаменте, применение метода характеристик затруднено на этапе выбора исходной схемы разрушения, и в этом случае МКЭ может оказаться более эффективным, что и показывают примеры расчетов. Так, в той же книге [3] приводится расчет зависимости p_{ult} от глубины заложения (рис. 7, б). Ширина штампа 2 м, параметры грунта $\varphi = 0^\circ$, $c = 20$ кПа, $\gamma = 20$ кН/м³. Синим цветом показан график по обычному решению, где заглубление сводится к пригрузке, зеленым – по расчету МКЭ.

Мы рассмотрели более общий случай, когда грунт обладает и трением, и сцеплением, и собственным весом ($\varphi = 20^\circ$, $c = 20$ кПа, $\gamma = 20$ кН/м³), а главное – наряду с ленточным штампом шириной 2 м рассчитали круглый штамп такого же диаметра. По боковой поверхности были установлены контактные элементы с нулевым сопротивлением сдвигу, чтобы оценить несущую способность именно подошвы. Результаты приведены на рис. 8.

Наряду с расчетом, в котором принимается, что заглубление эквивалентно пригрузке (расчет при этом производится не по нормам, а по точному решению), сравнение выполнялось также с решением Й. Бринч-Хансена [4]. Видно, что для осесимметричной задачи отличие решения МКЭ от последнего намного больше, чем для плоской задачи, что объясняется в первую очередь большой погрешностью перехода от ленточного штампа к круглому при помощи коэффициентов формы (см. [5]).

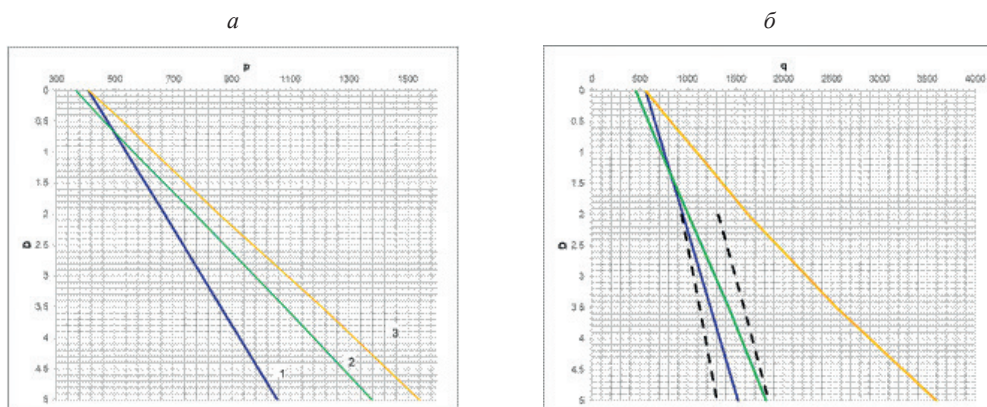


Рис. 8. Несущая способность основания штампа в зависимости от глубины заложения:

a – ленточный штамп; *б* – круглый штамп; 1 – расчет в предположении, что заглубление эквивалентно пригрузке; 2 – расчет по Бринч-Хансену [4]; 3 – расчет по PLAXIS

с ассоциированным законом; на рис. 8, б штриховыми линиями показаны предельные нагрузки при продавливании штампа согласно [6]: слева – при $E = 25$ МПа, справа – при $E = 100$ МПа

Кроме того, на рис. 8, б показаны границы предельного давления на заглубленный штамп, полученные в предположении, что разрушение основания происходит продавливанием [6], а не выпором на поверхность, как в вышеописанных расчетах. Видно, что для реальных глубоких фундаментов именно такая схема и реализуется, что вполне соответствует классификации форм разрушения по А. Весичу [7].

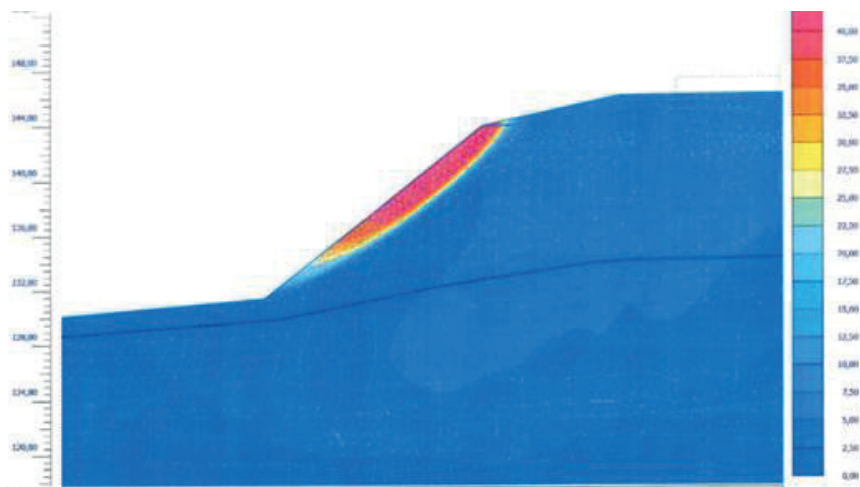
Точно так же МКЭ может использоваться для решения других сложных задач, например, расчета устойчивости откосов и склонов или взаимодействия противооползневых конструкций с грунтом, в частности, продавливания грунта между сваями.

Рассмотрим пример из практики. Вблизи бровки откоса, сложенного, главным образом, намывным песком, строится здание с пристройкой. Оценка устойчивости производилась МКЭ по методу снижения прочностных характеристик в двух вариантах. В первом варианте задавались характеристики песка, представленные в отчете об изысканиях и взятые из таблиц СП 22.13330 ($\varphi = 35^\circ$, $c = 1$ кПа, $\gamma = 18$ кН/м³) и нулевой угол дилатансии $\psi = 0^\circ$; во втором варианте угол дилатансии был увеличен до 35° .

В результате в 1-м варианте коэффициент запаса устойчивости откоса составил $k_{st} = 0,832$ (рис. 9, а), а во 2-м $k_{st} = 1,01$ (рис. 9, б). Кроме того, как видно на рисунках, существенно различаются размеры и положение зоны оползания, что влияет на конструкцию противооползневого крепления. К этому можно добавить, что после проведения дополнительных изысканий оказалось, что реальные характеристики пека существенно иные ($\varphi = 32-33^\circ$, $c = 10-12$ кПа) и коэффициент запаса устойчивости склона заметно выше 1,0, хотя и не дотягивает до требуемого нормами. И это соответствует натурным наблюдениям – склон благополучно стоит долгие годы.

Проблема здесь в том, что в процессе снижения прочностных характеристик в программе PLAXIS угол внутреннего трения уменьшается, а угол дилатансии остается неизменным, что приводит к тому, что угол дилатансии становится больше угла внутреннего трения – ситуация физически неправдоподобная. Поэтому были проведены расчеты для конкретных примеров, где варьировался угол дилатансии. Результаты приведены на рис. 10. Видно, что уже при $\tan \psi = 0,5 \tan \gamma$ дилатансия практически перестает влиять на результат. Нечто подобное было получено ранее для задачи о несущей способности (см. рис. 2).

а



б

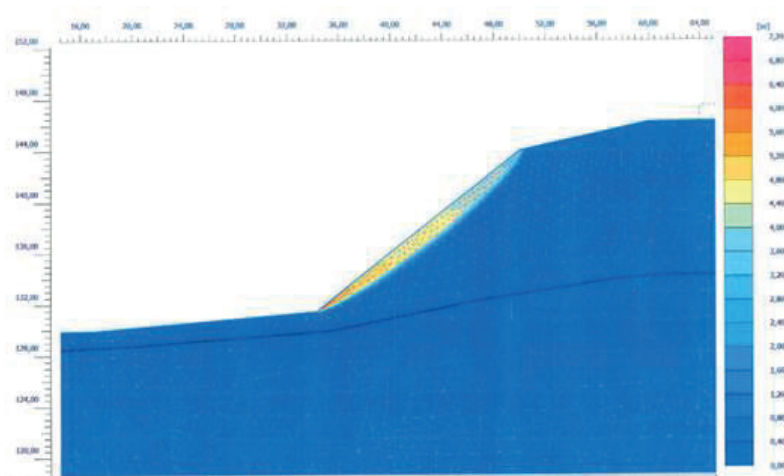


Рис. 9. Изополя смещений при разрушении откоса в случае неассоциированного закона течения пластического (а) и ассоциированного (б)

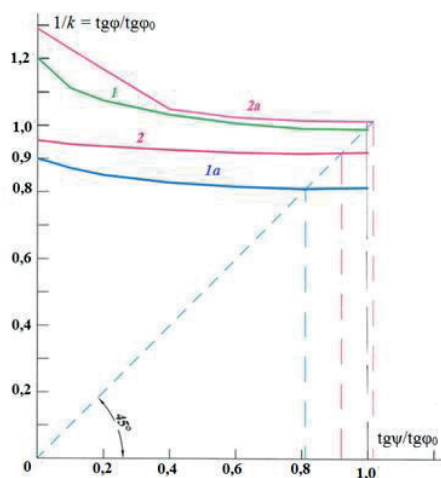


Рис. 10. Зависимость расчетного коэффициента запаса устойчивости откоса от угла дилатансии

Аналогичные проблемы возникают при расчете давления на противооплзневые сооружения в виде рядов свай. Аналитические методы здесь очень сложны, и потому в последние годы стали применяться расчеты МКЭ. Эта задача является обобщением классической задачи теории пластичности о продавливании полосы через сужение. Из решения последней задачи для идеально-пластического тела ($\varphi = 0^\circ$) известно, что усилие продавливания стремится к бесконечности, когда ширина сужения стремится к 0. Аналогичный результат получили авторы [8], используя расчеты по PLAXIS для углов внутреннего трения до 20° . Однако этот результат ошибочен, так как при ненулевых углах внутреннего трения возникает критическая ширина просвета между

опорами, которая тем больше, чем больше φ (этот результат получен в [9] полуаналитическим способом в геометрически упрощенной постановке). Видимо, причина ошибки – в использовании неассоциированного закона и в пренебрежении неадекватными результатами расчета при малых просветах между сваями, когда срыв счета воспринимался как случайная ошибка. В этом же причина того, что расчеты для больших углов внутреннего трения не приведены.

Несколько завершающих соображений.

1. Расчеты несущей способности, устойчивости и т. п. с использованием предельного условия Кулона – Мора можно производить МКЭ в рамках ассоциированного закона пластического течения и при адекватном разбиении сетки конечных элементов.

2. Недостаток неассоциированного закона заключается, видимо, в нарушении постулата устойчивости деформации Друккера. При этом чем больше разница между углами внутреннего трения и дилатансии, тем более вероятна потеря устойчивости счета в МКЭ.

3. Тем не менее, рекомендации значительно снижать угол дилатансии и имеют практический смысл, поскольку основное назначение МКЭ в геотехнике – это расчеты не по первой, а по второй группе предельных состояний, и при расчете, скажем, осадок снижение ψ идет «в запас».

4. Идеальный способ разбиения – адаптация сетки КЭ в процессе счета в соответствии с интенсивностью сдвиговых деформаций.

5. Там, где невозможно использовать ассоциированный закон (например, в методе снижения прочностных характеристик), следует применять углы дилатансии не менее половины угла внутреннего трения.

6. Несмотря на то что большинство примеров в данной статье были рассчитаны по программе PLAXIS, представляется, что выводы относятся ко всем эффективным конечноэлементным программам, например, к упомянутым здесь явно или неявно OPTUM и FEM-models.

Библиографический список

1. *Potts D. M., Zdravkovic L.* Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering: Theory. London: Thomas Telford. 1999.
2. *Potts D. M., Zdravkovic L.* Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering: Application. London: Thomas Telford. 2001.
3. *Улицкий В. М., Шашкин А. Г., Шашкин К. Г., Шашкин В. А.* Основы совместных расчетов зданий и оснований. СПб.: Издательство института «Геореконструкция», 2014.
4. *Brinch-Hansen J.* A general formula for bearing capacity. // Danish Geotechnical Institute. Bulletin № 11, Copenhagen, 1961. Pp. 38-46
5. *Федоровский В. Г.* Поправочный член к формуле Терцаги для расчета несущей способности основания // Основания, фундаменты и механика грунтов. 2016. № 6. С. 2-5.

6. Гревцев А. А., Федоровский В. Г. Расчет лобового сопротивления зонда по механическим характеристикам грунтов // Основания, фундаменты и механика грунтов. 2014. № 6. С. 2-5.

7. Vesic A. S. Analysis of Ultimate Loads of Shallow Foundations // Journal of SMFD. ASCE. Vol. 99. No. SM1 – Jan. 1973. Pp. 45-73.

8. Маций С. И., Деревенец Ф. Н. Применение метода конечных элементов для исследования взаимодействия грунтов оползня со сваями // Основания, фундаменты и механика грунтов. 2005. № 4. С. 8-12.

9. Федоровский В. Г. Предельное давление на ряд ленточных штампов и эффект непродавливания // Основания, фундаменты и механика грунтов. 2006. № 3. С. 9-13.

Авторы:

Виктор Григорьевич ФЕДОРОВСКИЙ, канд. техн. наук, зав. лабораторией механики грунтов НИИОСП им. Н. М. Герсеева АО «НИЦ «Строительство», Москва

Victor FEDOROVSKY, Ph. D. in Engineering, Head of Soil Mechanics Laboratory, NIIOSP named after N. M. Gersevanov JSC Research Center of Construction, Moscow

e-mail: geconltd@mail.ru

тел.: +7 (499) 170-69-41

Галина Александровна БОБЫРЬ, канд. техн. наук, старший научный сотрудник лаборатории механики грунтов НИИОСП им. Н. М. Герсеева АО «НИЦ «Строительство», Москва

Galina BOBYR, Ph. D. in Engineering, Senior Researcher of Soil Mechanics Laboratory, NIIOSP named after N. M. Gersevanov JSC Research Center of Construction, Moscow

e-mail: geconltd@mail.ru

тел.: +7 (499) 170-69-41

Игорь Алексеевич БОКОВ, научный сотрудник лаборатории механики грунтов НИИОСП им. Н. М. Герсеева АО «НИЦ «Строительство», Москва

Igor BOKOV, Researcher of Soil Mechanics Laboratory, NIIOSP named after N. M. Gersevanov JSC Research Center of Construction, Moscow

e-mail: geconltd@mail.ru

тел.: +7 (499) 170-69-41

Сергей Владимирович ИЛЬИН, старший научный сотрудник лаборатории электротехнических технологий НИИОСП им. Н. М. Герсеева АО «НИЦ «Строительство», Москва

Sergey ILIYN, Senior Researcher of the Laboratory of Electrotechnical Laboratory, NIIOSP named after N. M. Gersevanov JSC Research Center of Construction, Moscow

e-mail: lab38@mail.ru

тел.: +7 (499) 170-69-12