УДК 624.042.7
https://doi.org/10.37538/2224-9494-2021-1(28)-92-101

РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ ЛИНЕЙНО-СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ ПРИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОМ СЕЙСМИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ ГРУНТА, ЗАДАННОМ АКСЕЛЕРОГРАММАМИ

STRUCTURAL ANALYSIS BY RESPONSE SPECTRUM METHOD FOR DIFFERENTIAL SEISMIC GROUND MOTION GIVEN BY ACCELEROGRAMS

$\boxed{\text{Ю. П. НАЗАРОВ}}$, д-р техн. наук
Е. В. ПОЗНЯК, канд. техн. наук
В. Н. СИМБИРКИН, канд. техн. наук
В. В. КУРНАВИН

Дифференцированное сейсмическое движение грунта описывается векторным полем кинематических параметров, определенным в каждой точке основания. В расчетах сооружений на сейсмостойкость модель дифференцированного движения грунта принимают в случаях, когда одновременно сочетаются два фактора: 1) в спектре воздействия преобладают короткие волны с малыми длинами (по сравнению с размерами фундамента); 2) здание или сооружение имеет податливый фундамент или установлено на дискретных опорах. В статье описана методика проведения расчета конструкций линейно-спектральным методом (ЛСМ) на пространственное дифференцированное сейсмическое воздействие, заданное акселерограммами.

The differential seismic ground motion described by a vector field of kinematic parameters given at each point of the soil base. In seismic structural analyses, the differential ground motions taken into account in the cases where two factors are simultaneously combined: 1) in the seismic action spectrum, short waves (with small lengths in comparison to the size of the foundation) prevail; 2) the building or structure has a flexible foundation or discrete supports. The paper presents a method for structural analysis by Response Spectrum Method (RSM) for spatial differential seismic ground motion given by accelerograms. Formulae for modal seismic load obtained, and there are formulae for critical directions of seismic action. The analysis features to calculate the parameters of the seismic action discussed, *Выведены формулы для модальной сейсмической нагрузки, приведены формулы для опасных направлений сейсмического воздействия. Обсуждаются особенности расчета, связанные с определением расчетных параметров сейсмического воздействия, если сейсмическое воздействие задано акселерограммами в опорных точках, а также приведены рекомендации об упрощенном подходе к расчету при отсутствии информации о пространственном распределении ускорений и динамических коэффициентов.*

if the seismic action given by accelerograms at the support points, and recommendations are present for a simplified approach when there is no information about the spatial distribution of accelerations and amplification factors.

Ключевые слова:
Дифференцированное сейсмическое движение грунта, линейно-спектральный метод, модальный динамический отклик, опасные направления сейсмического воздействия, ротационное движение грунта, сейсмическое воздействие, сейсмостойкое проектирование

Key words:
Critical directions of seismic action, differential seismic ground motion, earthquake engineering, modal dynamic response, Response Spectrum Method, rotational ground motion, seismic action

Введение

В соответствии с новой редакцией СП 14.13330.2018 [1] при значениях фазовых скоростей распространения сейсмических волн до 400 м/с теперь необходимо учитывать волновой характер сейсмического воздействия. Инженерный анализ с учетом волновых сейсмических эффектов подразумевает применение интегральной дилатационно-ротационной или дифференцированной моделей движения грунта и получение соответствующих этим моделям расчетных параметров сейсмической нагрузки.

В интегральной дилатационно-ротационной модели предполагается, что объем грунта под фундаментом движется как твердое тело с тремя угловыми и тремя линейными степенями свободы; такая модель движения грунта применяется для зданий и сооружений на очень жестких фундаментах. Если фундамент податливый, а воздействие длинноволновое (доминирующие длины сейсмических волн многократно превосходят размеры фундамента), то интегральная модель также применима.

В дифференцированной модели сейсмическое грунтовое движение задается векторным полем кинематических параметров, определенным в каждой точке основания. Модель дифференцированного движения грунта принимается в случаях, когда одновременно сочетаются два фактора: 1) в спектре воздействия преобладают короткие волны с малыми длинами (по сравнению с размерами фундамента); 2) здание или сооружение имеет податливый фундамент или установлено на дискретных опорах. Длина одиночной гармонической волны с частотой ω и фазовой скоростью распространения c равна $\lambda = 2\pi c/\omega$, поэтому малые фазовые скорости распространения волн в грунте и высокочастотные воздействия способствуют появлению в спектре коротких сейсмических волн.

В этой статье рассматривается применение линейно-спектрального метода при дифференцированном сейсмическом воздействии: дано описание расчетных параметров дифференцированного воздействия, на основе уравнений движения системы с n степенями свободы получены выражения для сейсмической нагрузки, приведены формулы для опасных направлений сейсмического воздействия.

Описание дифференцированного воздействия

Дифференцированное сейсмическое воздействие передается на конструкцию в виде кинематического возбуждения жестко заделанных в грунтовое основание опор, причем грунт в зонах опирания может двигаться поступательно и совершать угловые (ротационные) перемещения [2, 3]. Пусть конструкция имеет p опорных точек, связанных с основанием. В неподвижной системе координат $O123$ движение грунта в зоне опирания i-й опорной точки (x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) описывается векторами абсолютных поступательных и ротационных перемещений, скоростей, ускорений ($i = 1, ..., p$) :

$$\mathbf{X}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = (X_{1i}^0\ X_{2i}^0\ X_{3i}^0)^{\mathrm{T}} \qquad \boldsymbol{\alpha}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = (\alpha_{1i}^0\ \alpha_{2i}^0\ \alpha_{3i}^0)^{\mathrm{T}}$$

$$\dot{\mathbf{X}}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = (\dot{X}_{1i}^0\ \dot{X}_{2i}^0\ \dot{X}_{3i}^0)^{\mathrm{T}} \qquad \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = (\dot{\alpha}_{1i}^0\ \dot{\alpha}_{2i}^0\ \dot{\alpha}_{3i}^0)^{\mathrm{T}}$$

$$\ddot{\mathbf{X}}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = (\ddot{X}_{1i}^0\ \ddot{X}_{2i}^0\ \ddot{X}_{3i}^0)^{\mathrm{T}} \qquad \ddot{\boldsymbol{\alpha}}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = (\ddot{\alpha}_{1i}^0\ \ddot{\alpha}_{2i}^0\ \ddot{\alpha}_{3i}^0)^{\mathrm{T}}$$

Вектор ускорений поступательного движения в i-й точке равен

$$\ddot{\mathbf{X}}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = |\ddot{\mathbf{X}}_i^0|\, \boldsymbol{v}_i^X(t), \tag{1}$$

где $|\ddot{\mathbf{X}}_i^0|$ – его модуль, $\boldsymbol{v}_i^X(t) = (v_{1i}^X\ \ v_{2i}^X\ \ v_{3i}^X)$ – вектор направления поступательного воздействия (вектор направляющих косинусов поступательного движения):

$$\left|\ddot{\mathbf{X}}_i^0\right| = \sqrt{\left(\ddot{X}_{1i}^0\right)^2 + \left(\ddot{X}_{2i}^0\right)^2 + \left(\ddot{X}_{3i}^0\right)^2},$$

$$\nu_{1i}^X = \frac{\ddot{X}_{1i}^0}{\left|\ddot{\mathbf{X}}_i^0\right|}, \quad \nu_{2i}^X = \frac{\ddot{X}_{2i}^0}{\left|\ddot{\mathbf{X}}_i^0\right|}, \quad \nu_{3i}^X = \frac{\ddot{X}_{3i}^0}{\left|\ddot{\mathbf{X}}_i^0\right|}, \qquad \left(\nu_{1i}^X\right)^2 + \left(\nu_{2i}^X\right)^2 + \left(\nu_{3i}^X\right)^2 = 1.$$

Аналогичное представление вектора ротационных ускорений имеет вид:

$$\ddot{\boldsymbol{\alpha}}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = |\ddot{\boldsymbol{\alpha}}_i^0|\, \boldsymbol{v}_i^\alpha(t) \tag{2}$$

с модулем $|\ddot{\boldsymbol{\alpha}}_i^0|$ и вектором направляющих косинусов $\boldsymbol{v}_i^\alpha(t) = (v_{1i}^\alpha\ \ v_{2i}^\alpha\ \ v_{3i}^\alpha)^{\mathrm{T}}$

$$\left|\ddot{\boldsymbol{\alpha}}_i^0\right| = \sqrt{\left(\ddot{\alpha}_{1i}^0\right)^2 + \left(\ddot{\alpha}_{2i}^0\right)^2 + \left(\ddot{\alpha}_{3i}^0\right)^2},$$

$$\nu_{1i}^\alpha = \frac{\ddot{\alpha}_{1i}^0}{\left|\ddot{\boldsymbol{\alpha}}_i^0\right|}, \quad \nu_{2i}^\alpha = \frac{\ddot{\alpha}_{2i}^0}{\left|\ddot{\boldsymbol{\alpha}}_i^0\right|}, \quad \nu_{3i}^\alpha = \frac{\ddot{\alpha}_{3i}^0}{\left|\ddot{\boldsymbol{\alpha}}_i^0\right|}, \qquad \left(\nu_{1i}^\alpha\right)^2 + \left(\nu_{2i}^\alpha\right)^2 + \left(\nu_{3i}^\alpha\right)^2 = 1.$$

За пиковые ускорения поступательного и ротационного движений в *i*-й точке примем $I_i^X = max\,|\ddot{\mathbf{X}}_i^0|$ и $I_i^\alpha = max\,|\ddot{\boldsymbol{\alpha}}_i^0|$. Объединенные векторы сейсмического движения грунта в зоне *i*-й опорной точки имеют вид:

$$\mathbf{q}_i^0\,(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = (\mathbf{X}_i^0\;\; \boldsymbol{\alpha}_i^0)^{\mathrm{T}}, \qquad \dot{\mathbf{q}}_i^0\,(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = (\dot{\mathbf{X}}_i^0\;\; \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i^0)^{\mathrm{T}},$$
$$\ddot{\mathbf{q}}_i^0\,(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = (\ddot{\mathbf{X}}_i^0\;\; \ddot{\boldsymbol{\alpha}}_i^0)^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

При расчетах по линейно-спектральному методу вектор ускорений $\ddot{\mathbf{q}}_i^0$ и направляющие косинусы воздействия принимаются постоянными во времени:

$$\ddot{\mathbf{q}}_i^0 = I_i^X \cdot \mathbf{v}_i = const\,, \quad \mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i^X \\ w_i \mathbf{v}_i^\alpha \end{pmatrix} = const, \tag{4}$$

здесь $\boldsymbol{v}_i$ – объединенный вектор направляющих косинусов $\boldsymbol{v}_i^X$ и $\boldsymbol{v}_i^\alpha$; $w_i = I_i^\alpha / I_i^X$ – относительная интенсивность углового ускорения.

Направления воздействия определяются из условия максимума динамической реакции конструкции (опасные направления сейсмического воздействия).

Пространственное распределение кинематических параметров точек грунта задается относительно одной точки – точки привязки [3]. Назначим точкой привязки первую опорную точку с вектором перемещений $\mathbf{q}_i^0$ и ускорений $\ddot{\mathbf{q}}_i^0$. Согласно (4), в точке привязки вектор ускорений выражается через пиковое ускорение поступательного движения $I = I_i^X$ и вектор направлений воздействия $\boldsymbol{v}_1$:

$$\ddot{\mathbf{q}}_i^0\,(x_1, x_2, x_3) = I\boldsymbol{v}_1. \tag{5}$$

Для описания поля ускорений вводятся скалярные функции координат, задающие пространственное изменение ускорений по отношению к точке привязки. Для *i*-й опорной точки, заданной вектором $\mathbf{r}_i = (x_{1i}, x_{2i}, x_{3i})$,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{1i} &= I_i^X v_{1i}^X / (I_i^X v_{11}^X), & \mathbf{T}_{4i} &= I_i^X w_i\, v_{1i}^\alpha / (I_i^X w_1 v_{11}^\alpha), \\ \mathbf{T}_{2i} &= I_i^X v_{2i}^X / (I_i^X v_{21}^X), & \mathbf{T}_{5i} &= I_i^X w_i\, v_{2i}^\alpha / (I_i^X w_1 v_{21}^\alpha), \\ \mathbf{T}_{3i} &= I_i^X v_{3i}^X / (I_i^X v_{31}^X), & \mathbf{T}_{6i} &= I_i^X w_i\, v_{3i}^\alpha / (I_i^X w_1 v_{31}^\alpha). \end{aligned} \tag{6}$$

Введем матрицу изменения ускорений в *i*-й опоре

$$\mathbf{T}_i^{[6\mathrm{x}6]} = \mathbf{T}_i\,(\mathbf{r}_i) = \mathrm{diag}\,(\mathbf{T}_{1i}, \mathbf{T}_{2i} \ldots \mathbf{T}_{6i})$$

для задания 6-мерного вектора ускорений в *i*-й опорной точке через пиковое ускорение в точке привязки (с учетом $\ddot{\mathbf{q}}_i^0 = I_i^X \cdot \boldsymbol{v}_i$):

$$\ddot{\mathbf{q}}_i^0 = \mathbf{T}_i\, \ddot{\mathbf{q}}_1^0 = I\mathbf{T}_i \boldsymbol{v}_1. \tag{7}$$

Полный 6*p*-мерный вектор ускорений $\ddot{\mathbf{q}}^0$ равен

$$\ddot{\mathbf{q}}^0 = I\mathbf{T}\boldsymbol{v} = const,\ \mathbf{T}^{[6p\,\mathrm{x}\,6p]} = \mathrm{diag}\,(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_p),\ \boldsymbol{v}^{[6p]} = (\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2 \quad \ldots \quad \boldsymbol{v}_p)^{\mathrm{T}}. \tag{8}$$

Коэффициенты динамичности (КД) также могут быть различными в разных точках поля кинематических параметров. Движению i-й опорной точки соответствует шестикомпонентный вектор спектральных коэффициентов динамичности

$$\boldsymbol{\beta}_i\,(\boldsymbol{\Omega}) = (\beta_{1i} \quad \beta_{2i} \quad \beta_{3i} \quad \beta_{4i} \quad \beta_{5i} \quad \beta_{6i})^{\mathrm{T}},$$

в точке привязки

$$\boldsymbol{\beta}_1\,(\boldsymbol{\Omega}) = (\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4 \quad \beta_5 \quad \beta_6)^{\mathrm{T}}.$$

Для описания пространственного изменения спектрального состава воздействия в [3] вводятся функции $\boldsymbol{\Theta}_{ji}$ (j = 1, 2, ..., 6 – номер компоненты вектора ускорений $\ddot{\mathbf{q}}_i^0$, i = 1, ..., p – номер опорной точки) так, что в i-й опорной точке с координатами $\mathbf{r}_i = (x_{1i}, x_{2i}, x_{3i})$ коэффициенты динамичности равны:

$$\beta_{1i}\,(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_i) = \beta_1\,(\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\Theta}_{1i}\,(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_i), \qquad \beta_{4i}\,(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_i) = \beta_4\,(\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\Theta}_{4i}\,(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_i),$$
$$\beta_{2i}\,(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_i) = \beta_2\,(\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\Theta}_{2i}\,(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_i), \qquad \beta_{5i}\,(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_i) = \beta_5\,(\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\Theta}_{5i}\,(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_i),$$
$$\beta_{3i}\,(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_i) = \beta_3\,(\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\Theta}_{3i}\,(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_i), \qquad \beta_{6i}\,(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_i) = \beta_6\,(\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\Theta}_{6i}\,(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_i),$$

или в векторном виде

$$\boldsymbol{\beta}_i\,(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_i) = \boldsymbol{\Theta}_i\,(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_i)\,\boldsymbol{\beta}_1(\boldsymbol{\Omega}),$$

где $\boldsymbol{\Theta}_i^{[6\mathrm{x}6]} = \mathrm{diag}\,(\boldsymbol{\Theta}_{1i}, ..., \boldsymbol{\Theta}_{6i})$ – матрица функций пространственного изменения КД относительно точки привязки. Совокупность КД во всех опорных точках задается вектором $\boldsymbol{\beta}$:

$$\boldsymbol{\beta}^{[6p]} = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\Omega}) = (\boldsymbol{\beta}_1 \quad ... \quad \boldsymbol{\beta}_p)^{\mathrm{T}}. \tag{9}$$

Введем блочную матрицу функций изменения спектрального состава $\boldsymbol{\Theta}^{[6p \times 6]} = \boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}) = (\boldsymbol{\Theta}_1, \boldsymbol{\Theta}_2, ..., \boldsymbol{\Theta}_p)^{\mathrm{T}}$, где $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_p)$, тогда вектор коэффициентов динамичности во всех опорных точках выражается через вектор динамических коэффициентов в точке привязки $\boldsymbol{\beta}_1^{[6]}$: $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\beta}_1$. В инженерных расчетах обычно принимают единый коэффициент динамичности для всех компонент воздействия – либо по огибающей КД, либо как максимальный элемент вектора $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\Omega}_k)$: $\beta_k = max(\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\Omega}_k))$, где $\boldsymbol{\Omega}_k$ – собственная частота k-й формы колебаний. При этом следует иметь в виду, что согласно [1] коэффициенты динамичности не должны быть меньше нормативных.

Уравнения движения при дифференцированном воздействии

Рассмотрим абсолютное движение системы с n степенями свободы под многомерным кинематическим воздействием, передающимся на конструкцию через p опорных точек. Пусть $\mathbf{q}_{abs}^{[n]}$ – вектор абсолютных обобщенных перемещений, задающий движение в неподвижной системе координат; $\mathbf{q}^{[n]}$ – вектор относительных обобщенных перемещений в подвижной системе координат. Подвижная система координат совершает переносное движение относительно неподвижных осей $\mathbf{q}_{tr}^{[n]}$. Так как упругие восстанавливающие силы и силы вязкого сопротивления совершают работу на относительных перемещениях и скоростях, в правой части уравнений движения появятся соответствующие обобщенные силы

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{abs} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_{abs} + \mathbf{K}\mathbf{q}_{abs} = -\mathbf{K}_s\mathbf{q}^0 - \mathbf{B}_s\,\dot{\mathbf{q}}^0, \tag{10}$$

где $\mathbf{M}^{[nxn]}$, $\mathbf{B}^{[nxn]}$ и $\mathbf{K}^{[nxn]}$ – матрицы инерции, демпфирования и жесткости конструкции соответственно; $\mathbf{K}_s^{[nx6p]}$, $\mathbf{B}_s^{[nx6p]}$ – матрицы жесткости и демпфирования системы опорных элементов соответственно; $\mathbf{q}^{0[6p]}$ и $\dot{\mathbf{q}}^{0[6p]}$ – соответственно векторы перемещений и скоростей грунта в опорных точках.

Для системы с n степенями свободы переносное движение определим как перемещения $\mathbf{q}_{tr}^{[n]}$, возникающие в конструкции от статических опорных перемещений $\mathbf{q}^0$, при этом

$$\mathbf{q}_{abs} = \mathbf{q} + \mathbf{q}_{tr}. \tag{11}$$

Из условия равновесия конструкции в опорных точках следует, что опорные реакции $\mathbf{K}_s\mathbf{q}^0 + \mathbf{B}_s\dot{\mathbf{q}}^0$ уравновешены силами $\mathbf{K}\mathbf{q}_{tr} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_{tr}$, возникающими в опорных элементах конструкции ($\dot{\mathbf{q}}_{tr}^{[n]}$ – вектор переносных скоростей):

$$\mathbf{K}\mathbf{q}_{tr} + \mathbf{K}_s\mathbf{q}^0 + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_{tr} + \mathbf{B}_s\dot{\mathbf{q}}^0 = \mathbf{0}. \tag{12}$$

При подстановке (11) в (10) с учетом (12) получим уравнения движения в относительных перемещениях:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{tr}. \tag{13}$$

При малом внутреннем демпфировании $\mathbf{K}\mathbf{q}_{tr} + \mathbf{K}_s\mathbf{q}^0 >> \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_{tr} + \mathbf{B}_s\dot{\mathbf{q}}^0$, следовательно, приближенно можно принять $\mathbf{K}\mathbf{q}_{tr} + \mathbf{K}_s\mathbf{q}^0 = \mathbf{0}$. Тогда вектор переносного движения выражается через матрицу податливости системы $\mathbf{F} = \mathbf{K}^{-1}$ как $\mathbf{q}_{tr} = -\mathbf{F}\mathbf{K}_s\mathbf{q}^0$, а уравнение относительного движения (13) принимает вид

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{M}\mathbf{F}\mathbf{K}_s\ddot{\mathbf{q}}^0.$$

Введем матрицу переносных инерционных коэффициентов для дифференцированного воздействия:

$$\mathbf{M}_s^{[nx6p]} = -\mathbf{M}\mathbf{F}\mathbf{K}_s, \tag{14}$$

в этих обозначениях уравнение (14) принимает такой же вид, как в относительном движении при интегральном воздействии [2, 4]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = -\mathbf{M}_s\ddot{\mathbf{q}}^0. \tag{15}$$

Сейсмическая нагрузка

Для решения динамических уравнений вида (15) применяют метод разложения по собственным формам с помощью ортогонального преобразования $\mathbf{q} = \mathbf{V}\mathbf{u}$, где $\mathbf{u}$ – вектор главных координат; $\mathbf{V}$ – матрица собственных форм системы $\mathbf{v}_k$, $k = 1, ..., n$. В пространстве главных координат при условии малого демпфирования и с учетом свойств матрицы собственных форм $\mathbf{K}\mathbf{V} = \mathbf{M}\mathbf{V}\boldsymbol{\Omega}^2$, $\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{V} = \mathbf{M}_{mod}$ система уравнений (15) принимает вид

$$\ddot{\mathbf{u}} + 2\boldsymbol{\varepsilon}\dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{u} = \mathbf{Q}, \tag{16}$$

где $\boldsymbol{\Omega}^2$ – матрица квадратов собственных частот; $\mathbf{Q} = -\mathbf{M}_{mod}^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{M}_s\ddot{\mathbf{q}}^0$ – вектор переносных сейсмических сил, с учетом (8) равный $\mathbf{Q} = -I\mathbf{M}_{mod}^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{M}_s\mathbf{T}\boldsymbol{v}$.

Модальное перемещение от статической нагрузки равно

$$u_k^{\text{ст}} = -\frac{I}{M_{mod,k}\boldsymbol{\Omega}_k^2}\mathbf{v}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_s\mathbf{T}\mathbf{v}_k,$$

где $\boldsymbol{v}_k$ – вектор опасных направлений сейсмического воздействия для k-й формы колебаний; $M_{mod,\,k} = \mathbf{v}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{v}_k$ – модальная масса по k-й форме. Динамические модальные перемещения по k-й форме получают в виде произведения u_k^{cm} на модальный коэффициент динамичности (КД)

$$u_k = \beta_k u_k^{\text{ст}} = -\frac{\beta_k I}{M_{mod,k}\boldsymbol{\Omega}_k^2}\mathbf{v}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_s\mathbf{T}\mathbf{v}_k. \tag{17}$$

Вектор динамической реакции системы на сейсмическое воздействие (вектор сейсмической нагрузки) **S** может быть представлен в виде суммы векторов модальных откликов $\mathbf{S}_k$:

$$\mathbf{S} = \mathbf{Kq} = \sum_{k=1}^{n} u_k\mathbf{K}\mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^{n} u_k\boldsymbol{\Omega}_k^2\mathbf{M}\mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{S}_k,$$

где $\mathbf{S}_k = u_k\boldsymbol{\Omega}_k^2\mathbf{M}\mathbf{v}_k$ – вектор модальных усилий по k-й форме колебаний. Обозначим за вектор-строку $\mathbf{m}_i$ i-ю строку матрицы инерции **M**, $i = 1, ..., n$. Такое представление дает возможность записать вектор $\mathbf{S_k}$ в покомпонентной форме:

$$S_{ik} = \beta_k I\mathbf{m}_i\frac{\mathbf{v}_k\mathbf{v}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_s}{M_{mod,k}}\mathbf{T}\mathbf{v}_k. \tag{18}$$

Коэффициент формы колебаний в принятых обозначениях имеет вид

$$\boldsymbol{\eta}_k = \frac{\mathbf{v}_k\mathbf{v}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_s}{M_{\mathrm{mod},k}}\mathbf{T}\mathbf{v}_k, \tag{19}$$

тогда $S_{ik} = \beta_k \boldsymbol{I}\mathbf{m}_i\boldsymbol{\eta}_k$.

Сейсмическая нагрузка (18) рассчитывается как нагрузка, возникающая при одновременном действии и поступательных, и ротационных компонент сейсмического воздействия, так, как это записано в исходных линейных уравнениях движения. Если анализ коэффициентов корреляции акселерограмм поступательного и ротационного движения показывает статистическую независимость соответствующих случайных процессов, то в расчетах их можно рассматривать как отдельные нагружения. Для расчета сейсмической нагрузки только от поступательного движения в полном векторе направлений воздействия (8) следует «занулить» все направляющие косинусы ротационного движения $\boldsymbol{v}_i^{\alpha}$ или положить $w_i = 0$, а коэффициенты динамичности в (18) рассчитываются по акселерограммам поступательного движения. Для расчета сейсмической нагрузки только от ротаций в векторе направлений (8) следует принять равными нулю все направляющие косинусы поступательного движения $\boldsymbol{v}_i^{X}$. При этом коэффициенты динамичности в (18) рассчитываются по акселерограммам ротационного движения. Сейсмическая нагрузка, полученная отдельно для поступательного и ротационного движений, суммируется по правилу ККСК (как корень квадратный из суммы квадратов).

Опасные направления сейсмического воздействия

Для определения опасных направлений сейсмического воздействия введем матрицу $\mathbf{M}^s = \mathbf{M}_s^{[n\text{x}6p]}\,\mathbf{T}^{[6p\text{ x }6p]}$, и структурируем её, выделив в ней p блоков $\mathbf{M}_i^{s[n\text{x}6]}$:

$$\mathbf{M}^s = (\mathbf{M}_1^s \quad \dots \quad \mathbf{M}_i^s \dots \quad \mathbf{M}_p^s).$$

Опасные направления сейсмического воздействия задаются вектором $\boldsymbol{v}_k$:

$$\boldsymbol{v}_k^{[6p]} = (\boldsymbol{v}_{k,1} \quad \boldsymbol{v}_{k,2} \quad \dots \quad \boldsymbol{v}_{k,i} \quad \dots \quad \boldsymbol{v}_p)^{\mathrm{T}},$$

где

$$\mathbf{v}_{k,i} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{k,i}^X \\ w_i \mathbf{v}_{k,i}^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{v}_{k,1i}^X & \mathrm{v}_{k,2i}^X & \mathrm{v}_{k,3i}^X & w_i \mathrm{v}_{k,1i}^\alpha & w_i \mathrm{v}_{k,2i}^\alpha & w_i \mathrm{v}_{k,3i}^\alpha \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

– вектор направляющих косинусов в i-й опорной точке, рассчитываются для k-й формы колебаний в каждой i-й опорной точке по формулам [2, 3]:

$$\mathbf{v}_{k,i}^X = k_1 \begin{pmatrix} \mathbf{v}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{m}_{1i}^{s,X} & \mathbf{v}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{m}_{2i}^{s,X} & \mathbf{v}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{m}_{3i}^{s,X} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

где

$$k_1 = -\frac{1}{\sqrt{\left(\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{1i}^{s,X}\right)^2 + \left(\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{2i}^{s,X}\right)^2 + \left(\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{3i}^{s,X}\right)^2}};$$

$$\mathbf{v}_{k,i}^\alpha = k_2 \begin{pmatrix} \mathbf{v}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{m}_{1i}^{s,\alpha} & \mathbf{v}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{m}_{2i}^{s,\alpha} & \mathbf{v}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{m}_{3i}^{s,\alpha} \end{pmatrix},$$

где

$$k_2 = -\frac{1}{\sqrt{\left(\mathbf{v}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{m}_{1i}^{s,\alpha}\right)^2 + \left(\mathbf{v}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{m}_{2i}^{s,\alpha}\right)^2 + \left(\mathbf{v}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{m}_{3i}^{s,\alpha}\right)^2}}.$$

Здесь $\mathbf{m}_{1i}^{s,X}$, $\mathbf{m}_{2\mathrm{i}}^{s,X}$, $\mathbf{m}_{3i}^{s,X}$, – 1-й, 2-й или 3-й столбец матрицы $\mathbf{M}_i^s$; $\mathbf{m}_{1i}^{s,\alpha}$, $\mathbf{m}_{2i}^{s,\alpha}$, $\mathbf{m}_{3i}^{s,\alpha}$– 4-й, 5-й или 6-й столбец матрицы $\mathbf{M}_i^s$.

Опасные направления для плоской модели:

$$\mathbf{v}_{k,X} = k_1 \begin{pmatrix} \mathbf{v}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{m}_{s,1X} & 0 & \mathbf{v}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{m}_{s,3X} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad k_1 = -\frac{1}{\sqrt{\left(\mathbf{v}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{m}_{s,1X}\right)^2 + \left(\mathbf{v}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{m}_{s,3X}\right)^2}},$$
$$\mathbf{v}_{k,\alpha} = k_2 \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{v}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{m}_{s,2\alpha} & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad k_2 = -\frac{1}{\left|\mathbf{v}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{m}_{s,2\alpha}\right|}. \tag{20}$$

Заключение

В статье приведены основные теоретические выкладки, позволяющие провести расчет линейно-спектральным методом на дифференцированное сейсмическое воздействие. Надо отметить, что эта непростая задача сопряжена с решением другой важной проблемы – моделированием пространственно-временных полей кинематических параметров движения грунта и получением акселерограмм в различных точках грунтового основания. Движения, смоделированные в рамках теории плоских упругих волн, подчас сильно отличаются от результатов наблюдений на сейсмических полигонах [7-9]. Как показано, для применения ЛСМ необходимы только пиковые ускорения грунта и коэффициенты динамичности в опорных точках. Даже если проектировщик не обладает знаниями о пространственном распределении ускорений и динамических коэффициентов, он может провести упрощенный расчет, приняв их постоянными во всех опорных точках. Расчет по опасным направлениям сейсмического воздействия все равно будет учитывать возможное движение опор в противофазе. Таким образом, ЛСМ, применяемый совместно с концепцией опасных направлений, остается самым надежным методом проектирования строительных конструкций и при дифференцированной модели движения грунта.

Библиографический список

1. СП 14.13330.2018 Строительство в сейсмических районах. Актуализированная редакция СНиП II-7-81* (с Изменением №1).

2. *Назаров Ю.П.* Аналитические основы расчета сооружений на сейсмические воздействия. М.: Наука. 2010. – 468 с.

3. *Назаров Ю.П.* Расчетные параметры волновых полей сейсмических движений грунта. М.: Наука. 2015. 401 с.

4. *Nazarov Yuri P., Poznyak Elena.* Response Spectrum Method for integrated and differential spatial seismic ground motions // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. Vol. 108. 2018. May. Pp. 69–78.

5. *Назаров Ю.П., Позняк Е.В.* Моделирование процесса распространения волн Рэлея в пространстве по заданной акселерограмме // Строительство и реконструкция. 2015. №2 (58). С. 20-26.

6. *Позняк Е.В.* Применение обобщенного линейно-спектрального метода. Часть 2 // Дифференцированное сейсмическое воздействие. 2018. №4. С. 61-68.

7. *Liu C., Huang B., Lee W.H.K.* Observing rotational and translational ground motions at the HGSD station in Taiwan from 2007 to 2008 // Bull Seism Soc Am 2009; 99: 1228–36.

8. *Lee W., Huang B.S., Langston C.A., Lin C.J., Liu C.C., Shin T.C., Teng T.L., Wu C.F.* Review: progress in rotational ground motion observations from explosions and local earthquakes in Taiwan // Bull Seism Soc Am 2009; 99:958–67.

9. *Yin J., Nigbor R. L., Chen Q., Steidl J.* Engineering analysis of measured rotational ground motions at GVDA // Soil Dynamics and Earthquake Engineering 87 (2016) 125–137.

Авторы:

Юрий Павлович НАЗАРОВ, д-р техн. наук, сектор сейсмостойкости и сооружения АО «НИЦ «Строительство», Москва

Yuriy NAZAROV, D. Sci. (Engineering), sector of seismic resistance and structures, JSC Research Center of Construction, Moscow

e-mail: nazarov-dom@mail.ru

Елена Викторовна ПОЗНЯК, канд. техн. наук, помощник проректора НИУ «МЭИ», Москва
Elena POZNYAK, Ph. D. (Engineering), assistant of Vice-rector of Power Engineering Institute National Research University, Moscow
e-mail: elpoz@yandex.ru
тел.: +7 (926) 584-88-27

Валерий Николаевич СИМБИРКИН, канд. техн. наук, главный инженер ООО «ЕВРОСОФТ», Москва
Valery SIMBIRKIN, Ph. D. (Engineering), chief engineer of EUROSOFT Co., Moscow
e-mail: simbirkin@eurosoft.ru

Виктор Владимирович КУРНАВИН, лаборатория автоматизации исследований и проектирования сооружений ЦНИИСК им. В. А. Кучеренко АО «НИЦ «Строительство», Москва
Victor KURNAVIN, engineer, laboratory for automation of research and design of structures, TSNIISK named after V. A. Koucherenko JSC Research Center of Construction, Moscow
e-mail: kv@eurosoft.ru
тел.: +7 (916) 114-56-35