

УДК 624.01

[https://doi.org/10.37538/2224-9494-2022-2\(33\)-122-138](https://doi.org/10.37538/2224-9494-2022-2(33)-122-138)

EDN: HCHWEX

# О ПРИМЕНЕНИИ ЖЕСТКОСТЕЙ АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА РАСЧЕТА ПРЯМЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КЕССОННЫХ ПЕРЕКРЫТИЙ

М.В. МОЗГОЛОВ, канд. техн. наук

Е.В. КОЗЛОВА 

*Коломенский институт (филиал) ФГБОУ ВО «Московский политехнический университет»,  
ул. Октябрьской революции, д. 408, г. Коломна, 140402, Российская Федерация*

## Аннотация

*Введение.* Анализ данных аналитических и компьютерных расчетов железобетонных кессонных перекрытий показывает, что в зависимости от созданной конечно-элементной модели и геометрии конструкции усилия в балках могут существенно отличаться. Как правило, при сравнении изгибающих моментов аналитическую модель исследователи используют в качестве эталонной. Примеры, имеющиеся в литературе, свидетельствуют, что вне зависимости от геометрии перекрытия при определении нагрузок на конструкции в расчетах используется жесткость отдельных центральных ортогональных балок или условных выделенных полос.

*Цель* данной работы – выяснение достоверности получаемых усилий в балках прямых кессонных железобетонных перекрытий с использованием в формулах аналитического расчета жесткости отдельных балок.

*Материалы и методы.* Методика выполнения работы предусматривает сравнение изгибающих моментов, полученных аналитическим способом с данными метода конечных элементов вычислительного комплекса SCAD в балках различной жесткости центральных зон прямых кессонных перекрытий. Рассматриваются перекрытия квадратные в плане 12,0 × 12,0 м с различным соотношением сторон кессонов, а также перекрытия с квадратными кессонами 1,5 × 1,5 м и различным соотношением сторон пролетов. В качестве компьютерной модели принята система перекрестных балок из стержней таврового сечения.

*Результаты.* Значения изгибающих моментов, вычисленные аналитическим способом и компьютерным методом конечных элементов в перекрытиях квадратных в плане с квадратными кессонами, совпадают, что является частным случаем. Значения изгибающих моментов, вычисленные аналитическим способом и методом конечных элементов в перекрытиях прямоугольных в плане или с прямоугольными кессонами, отличаются. Отличия возрастают с увеличением отношения сторон пролетов или сторон кессонов.

*Выводы.* В общем случае расчета применение в формулах аналитического метода определения усилий в балках прямых железобетонных кессонных перекрытий жесткости отдельных центральных ортогональных балок или условных выделенных полос приводит к ошибочным результатам.

**Ключевые слова:** железобетонные кессонные перекрытия, прямые кессоны, конечно-элементная расчетная модель, изгибающие моменты, аналитический метод расчета, жесткость балок

**Для цитирования:** Мозголов М.В., Козлова Е.В. О применении жесткостей аналитического метода расчета прямых железобетонных кессонных перекрытий. *Вестник НИЦ «Строительство»*. 2022;33(2):122–138. [https://doi.org/10.37538/2224-9494-2022-2\(33\)-122-138](https://doi.org/10.37538/2224-9494-2022-2(33)-122-138)

**Вклад авторов**

Мозголов М.В. – создание компьютерных моделей, сбор материала, обработка материала, научное редактирование, оформление статьи.

Козлова Е.В. – сбор материала, обработка материала, аналитический расчет конструкций, оформление статьи.

**Финансирование**

Исследование не имело спонсорской поддержки.

**Конфликт интересов**

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию 17.04.2022

Поступила после рецензирования 03.06.2022

Принята к публикации 14.06.2022

## USE OF ANALYTICAL METHOD FOR CALCULATING STIFFNESSES OF STRAIGHT WAFFLE SLABS

M.V. MOZGOLOV, Cand. Sci. (Engineering)

E.V. KOZLOVA 

*Kolomna Institute (branch) of the Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Moscow Polytechnic University", October Revolution str., 408, Kolomna, 140402, Russian Federation*

**Abstract**

*Introduction.* The analysis of analytical and computer-assisted calculations of waffle slabs shows that, depending on the established finite-element model and structure geometry, the forces in beams can vary significantly. As a rule, the analytical model is used as a reference when comparing bending moments. Examples available in the literature show that regardless of the slab geometry, the stiffness of individual central orthogonal beams or conditionally selected beams is used in the calculations when determining structural loads.

*Aim.* In this work, the accuracy of resulting forces in the beams of straight waffle slabs was assessed using the stiffness of individual beams in the analytical calculation.

*Materials and methods.* The work was carried out by comparing the bending moments obtained analytically and in the SCAD software by the finite-element method for beams having various stiffnesses in the central zones of straight waffle slabs. 12.0 × 12.0 m slabs square in plan having different aspect ratios of waffle were considered, as well as slabs having square 1.5 × 1.5 m waffles and different aspect ratios of spans. A T-beam-and-girder construction was used in the computer model.

*Results.* The values of bending moments of slabs square in plan having square caissons calculated analytically and using the computer-assisted finite-element method coincide, being a particular case. The bending moments calculated analytically and using the finite-element method for rectangular slabs or slabs having rectangular caissons differ. As the ratio of the span or caisson sides increases, these deviations increase.

*Conclusions.* In the general calculation, using the stiffnesses of individual central orthogonal beams or conditionally selected beams for the analytical determination of forces in the beams of straight waffle slabs leads to erroneous results.

**Keywords:** waffle slabs, straight caissons, finite-element calculation model, bending moments, analytical calculation method, beam stiffness

**For citation:** Mozgolov M.V., Kozlova E.V. Use of analytical method for calculating stiffnesses of straight waffle slabs. *Bulletin of Science and Research Center of Construction*. 2022;33(2):122–138. (In Russ.) [https://doi.org/10.37538/2224-9494-2022-2\(33\)-122-138](https://doi.org/10.37538/2224-9494-2022-2(33)-122-138)

#### **Author contribution statements**

Mozgolov M.V. – computer model development, data collection, data processing, scientific editing, article preparation.

Kozlova E.V. – data collection, data processing, analytical calculation of structures, article preparation.

#### **Funding**

No funding support was obtained for the research.

#### **Conflict of interest**

The authors declare no conflict of interest.

*Received 17.04.2022*

*Revised 03.06.2022*

*Accepted 14.06.2022*

## **Введение**

Одним из эффективных с конструктивной точки зрения и необычным по архитектуре является часторебристое перекрытие кессонного типа [1–11]. С появлением новых технологий проектного, расчетного и производственного направлений интерес к кессонным перекрытиям растет. Распространение получают опалубочные системы SKYDOME, NAUTILUS, HOLEDECK, U-Boot Beton и др.

На основании Федерального закона от 27.06.2019 № 151-ФЗ в ст. 1 Градостроительного кодекса Российской Федерации от 29.12.2004 № 190-ФЗ введено понятие информационной модели объекта капитального строительства. Это и проектная документация, включающая в себя конструкторскую расчетную модель, и исполнительная документация, и документооборот, формируемые в электронном виде на всех этапах строительства объекта. В соответствии с требованиями п. 3 ч. 4 ст. 16 от 30.12.2009 № 384-ФЗ «Технический регламент о безопасности зданий и сооружений» при создании расчетной модели строительных конструкций должна быть учтена их пространственная работа. В связи с этим без моделирования и выполнения прочностных расчетов в вычислительных комплексах современному инженеру не обойтись. Любое здание, сооружение с конструктивной точки зрения состоит из множества различных несущих и самонесущих конструкций. Вычислительные комплексы имеют набор различных типов конечных элементов, поэтому смоделировать на ЭВМ строительную систему можно разнообразно.

При выполнении расчета инженер должен быть уверен, что его условная расчетная схема соответствует проектируемой конструкции, удовлетворяет требованиям надежности, экономичности и безопасности. В работе [15] представлены значения изгибающих моментов в балках кессонного перекрытия прямоугольного в плане  $11,55 \times 9,0$  м с прямоугольными кессонами  $1,65 \times 1,5$  м, рассчитанного при помощи различных компьютерных моделей вычислительного комплекса SCAD. Полученные данные сравниваются с данными аналитического расчета [2], при этом различия в изгибающих моментах составляют от  $-6,3$  до  $+61,9$  %.

О значительных отклонениях изгибающих моментов, найденных аналитическим и компьютерными методами в балках прямых кессонных железобетонных перекрытий, отмечается в работах [5] (50 %), [11] (40 %), в балках косых кессонов в работе [9] (453 %). Известно, что компьютерный расчет методом конечных элементов является неточным, для некоторых типов элементов сходимость по изгибающим моментам и поперечным силам может не обеспечиваться [12, 13]. Поэтому важным является сравнение данных, получаемых на компьютерных моделях и аналитическими способами с известным решением.

## Цель

Целью данной работы является выяснение достоверности получаемых усилий в балках прямых кессонных железобетонных перекрытий с использованием в формулах аналитического расчета жесткости отдельных ортогональных балок.

## Материалы и методы исследования

С методикой аналитического расчета железобетонных кессонных перекрытий, опертых по контуру, можно познакомиться в следующих работах [1–10]. В табл. 1 представлены данные примеров, имеющиеся в литературе [1–3, 5]. Жесткость конструкций определена для сечений элементов, выполненных из бетона класса В20 без изменения модуля упругости материала.

Из таблицы видно, что по соотношению жесткостей имеется три типа перекрытия: 1-й – одинаковые ортогональные жесткости как отдельных балок, так и перекрытия [5]; 2-й – одинаковые ортогональные жесткости отдельных балок, разные ортогональные жесткости перекрытия [3]; 3-й – разные ортогональные жесткости как отдельных балок, так и перекрытия [1, 2].

Таблица 1

### Вычисленные жесткостные характеристики кессонных перекрытий примеров, приведенных в литературе

Table 1

#### Calculated stiffness properties of waffle slabs based on examples provided in the literature

| Автор, схема перекрытия   | Жесткость центральных балок, расположенных вдоль осей X, Y |                     | Жесткость перекрытия без учета опорного контура вдоль осей X, Y |                     |
|---|--|---------------------|---|---------------------|
|   | $EI_x, \text{Тм}^2$  | $EI_y, \text{Тм}^2$ | $EI_x, \text{Тм}^2$   | $EI_y, \text{Тм}^2$ |
| [1]<br>$L_x = 1,75 \text{ м} \times 6 = 10,5 \text{ м}$<br>$L_y = 1,68 \text{ м} \times 5 = 8,4 \text{ м}$  | 10044  | 10170               | 42878   | 53598               |
| [2]<br>$L_x = 1,5 \text{ м} \times 6 = 9 \text{ м}$<br>$L_y = 1,65 \text{ м} \times 7 = 11,55 \text{ м}$  | 9451   | 9169                | 59425   | 48540               |
| [3]<br>$L_x = 1,14 \text{ м} \times 2 + 1,0 \text{ м} \times 2 = 4,28 \text{ м}$<br>$L_y = 0,89 \text{ м} \times 2 + 1,0 \text{ м} \times 4 = 5,78 \text{ м}$ | 422  | 422                 | 2179  | 1368                |
| [5]<br>$L_x = 2,0 \text{ м} \times 5 = 10,0 \text{ м}$<br>$L_y = 2,0 \text{ м} \times 5 = 10,0 \text{ м}$   | 12957  | 12957               | 55005   | 55005               |

В основе всех расчетов принято положение о равенстве прогибов двух условных единичных ортогональных полос или фактических отдельных балок, расположенных в средней части перекрытия.

$$f_x = f_y, \tag{1}$$

$$f_x = \frac{5}{384} \times \frac{q_x \times L_x^4}{E \times I_x}, \tag{2}$$

$$f_y = \frac{5}{384} \times \frac{q_y \times L_y^4}{E \times I_y}, \tag{3}$$

$$\frac{5}{384} \times \frac{q_x \times L_x^4}{E \times I_x} = \frac{5}{384} \times \frac{q_y \times L_y^4}{E \times I_y}. \tag{4}$$

Обозначим жесткость балки вдоль оси X

$$B_x = E \times I_x, \tag{5}$$

жесткость балки вдоль оси Y

$$B_y = E \times I_y, \tag{6}$$

составляющие общей нагрузки, приходящиеся на балки, расположенные вдоль осей X и Y,

$$q_x + q_y = q. \tag{7}$$

Можно записать

$$q_y = q - q_x, \tag{8}$$

$$\frac{q_x \times L_x^4}{B_x} = \frac{q \times L_y^4 - q_x \times L_y^4}{B_y}, \tag{9}$$

$$q_x = q \times \frac{L_y^4 \times B_x}{L_x^4 \times B_y + L_y^4 \times B_x}, \tag{10}$$

$$q_x = q - q_y, \tag{11}$$

$$\frac{q_y \times L_y^4}{B_y} = \frac{q \times L_x^4 - q_y \times L_x^4}{B_x}, \tag{12}$$

$$q_y = q \times \frac{L_x^4 \times B_y}{L_x^4 \times B_y + L_y^4 \times B_x}. \tag{13}$$

Если геометрия и материал центральных ортогональных балок одинаковые, их жесткости тоже одинаковые:

$$E \times I_x = E \times I_y, \quad (14)$$

$$B_x = B_y. \quad (15)$$

На первом этапе аналитического расчета рассматриваемых примеров [1–3, 5], приведенных в табл. 1, определяются составляющие общей нагрузки, приходящиеся на балки  $q_x + q_y = q$ , расположенные вдоль осей X и Y, зависящие только от размеров пролетов перекрытия  $L_x$  и  $L_y$ . Это свидетельствует о принятии в расчете одинаковых жесткостей отдельных центральных балок или условных выделенных полос, а не жесткостей перекрытия (суммарной жесткости параллельных балок).

$$q_x = q \times \frac{L_y^4 \times B_x}{L_x^4 \times B_y + L_y^4 \times B_x} = q \times \frac{L_y^4}{L_x^4 + L_y^4}, \quad (16)$$

$$q_y = q \times \frac{L_x^4 \times B_y}{L_x^4 \times B_y + L_y^4 \times B_x} = q \times \frac{L_x^4}{L_x^4 + L_y^4}. \quad (17)$$

На втором этапе определяются усилия – изгибающие моменты и поперечные силы.

Максимальные изгибающие моменты в балках, расположенных вдоль осей X и Y, определяются по формулам:

$$M_x^{max} = \alpha_1 \times q_x \times a \times L_x^2 \times n_x, \quad (18)$$

$$M_y^{max} = \alpha_2 \times q_y \times b \times L_y^2 \times n_y, \quad (19)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – коэффициенты, зависящие от характера распределения нагрузки и вида опорных закреплений. При равномерно-распределенной нагрузке на перекрытие и шарнирно-опертом контуре  $\alpha = 0,125$ ;

$a, b$  – шаг балок;

$n_x, n_y$  – коэффициенты пропорциональности, зависящие от расположения балок в перекрытии.

Методика выполнения работы предусматривает сравнение усилий – изгибающих моментов, полученных аналитическим способом и методом конечных элементов в вычислительном комплексе SCAD в балках центральных зон прямых кессонных перекрытий с различной геометрией. Рассматриваются шарнирно-опертые по контуру перекрытия квадратные в плане  $12,0 \times 12,0$  м с размерами кессонов  $1,5 \times 1,5$  м,  $1,5 \times 2,0$  м,  $1,5 \times 2,4$  м,  $1,5 \times 3,0$  м,  $1,5 \times 4,0$  м, а также перекрытия с размерами в плане  $12,0 \times 15,0$  м,  $12,0 \times 18,0$  м,  $12,0 \times 21,0$  м,  $12,0 \times 24,0$  м с квадратными кессонами  $1,5 \times 1,5$  м. Перекрытия рассчитываются на равномерно-распределенную нагрузку  $q = 1$  Т/м<sup>2</sup>. В работе поперечные силы не вычисляются и не сравниваются, так как аналитический метод расчета не позволяет определить их достоверно, равновесие систем аналитического расчета не соблюдается [9, 10].

В методе конечных элементов считается, что наиболее точной является модель, состоящая из стержней постоянной жесткости по их длине, и для статической задачи постановка вопроса о сходимости МКЭ лишена смысла [13]. Поэтому в качестве компьютерной модели принята система перекрестных балок из стержней таврового сечения (конечный элемент

тип 5 – пространственный стержень) с непосредственным приложением к ним погонной нагрузки, собираемой с отсеков по законам треугольника и трапеции [6, 7]. Во всех схемах сечение пролетных балок принято высотой 500 мм, шириной ребра 250 мм, толщиной полки 80 мм, шириной полки равной шагу балок, бетоном класса В25.

В часторебристом перекрытии для балок одного направления балки другого направления являются для первых ребрами жесткости, и в соответствии с требованиями п. 8.1.11 СП 63.13330.2018 «Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения» в расчете мы должны учитывать всю ширину полки.

В соответствии с требованиями п. 6.2.5 СП. 430.1325800.2018 «Монолитные конструктивные системы. Правила проектирования» и п. 2.1.1.1. Методического пособия [16] для учета ползучести бетона и наличия трещин при расчете балок компьютерных моделей начальный модуль упругости бетона умножался на коэффициент 0,2 для участков с трещинами (пролетные балки) и 0,3 для участков без трещин (балки опорного контура).

Выполним аналитический расчет в соответствии с теорией, учитывающей величины пролетов и жесткость отдельных ортогональных балок.

Перекрытие размером в плане ( $L_x \times L_y$ ) 12,0 × 12,0 м с кессонами 1,5 × 1,5 м. Рассматриваем центральные балки  $B_{1,5X}$  (жесткость  $B_x$ ) и  $B_{1,5Y}$  (жесткость  $B_y$ ). Жесткости определены в вычислительном комплексе SCAD.

Жесткость балок:

$$B_x = 0,2 \times E_b \times I_x = 3125 \text{ Тм}^2, \quad (20)$$

$$B_y = 0,2 \times E_b \times I_y = 3125 \text{ Тм}^2. \quad (21)$$

Составляющие общей нагрузки, приходящиеся на балки:

$$q_x = q \times \frac{L_y^4 \times B_x}{L_x^4 \times B_y + L_y^4 \times B_x} = 1 \times \frac{12^4 \times 3125}{12^4 \times 3125 + 12^4 \times 3125} = 0,5 \frac{\text{Т}}{\text{м}^2}, \quad (22)$$

$$q_y = q \times \frac{L_x^4 \times B_y}{L_x^4 \times B_y + L_y^4 \times B_x} = 1 \times \frac{12^4 \times 3125}{12^4 \times 3125 + 12^4 \times 3125} = 0,5 \frac{\text{Т}}{\text{м}^2}. \quad (23)$$

Максимальные изгибающие моменты в середине пролета:

$$M_{B_{1,5X}}^{max} = \alpha \times q_x \times a \times L_x^2 \times n_x = 0,125 \times 0,5 \times 1,5 \times 12^2 \times 1 = 13,5 \text{ Тм}, \quad (24)$$

$$M_{B_{1,5Y}}^{max} = \alpha \times q_y \times b \times L_y^2 \times n_y = 0,125 \times 0,5 \times 1,5 \times 12^2 \times 1 = 13,5 \text{ Тм}. \quad (25)$$

Перекрытие размером в плане 12,0 × 12,0 м с кессонами 1,5 × 2,0 м. Рассматриваем центральные балки  $B_{1,5X}$  и  $B_{2,0Y}$ .

$$B_x = 0,2 \times E_b \times I_x = 3125 \text{ Тм}^2, \quad (26)$$

$$B_y = 0,2 \times E_b \times I_y = 3421 \text{ Тм}^2, \quad (27)$$

$$q_x = q \times \frac{L_y^4 \times B_x}{L_x^4 \times B_y + L_y^4 \times B_x} = 1 \times \frac{12^4 \times 3125}{12^4 \times 3421 + 12^4 \times 3125} = 0,477 \frac{\text{Т}}{\text{м}^2}, \quad (28)$$

$$q_y = q \times \frac{L_x^4 \times B_y}{L_x^4 \times B_y + L_y^4 \times B_x} = 1 \times \frac{12^4 \times 3421}{12^4 \times 3421 + 12^4 \times 3125} = 0,523 \frac{\text{Т}}{\text{м}^2}, \quad (29)$$

$$M_{B_{1,5X}}^{max} = \alpha \times q_x \times a \times L_x^2 \times n_x = 0,125 \times 0,477 \times 1,5 \times 12^2 \times 1 = 12,88 \text{ Тм}, \quad (30)$$

$$M_{B_{2,0Y}}^{max} = \alpha \times q_y \times b \times L_y^2 \times n_y = 0,125 \times 0,523 \times 2,0 \times 12^2 \times 1 = 18,83 \text{ Тм}. \quad (31)$$

Перекрытие размером в плане  $12,0 \times 12,0$  м с кессонами  $1,5 \times 2,4$  м. Рассматриваем центральные балки  $B_{1,5X}$  и  $B_{2,4Y}$ .

$$B_x = 0,2 \times E_b \times I_x = 3125 \text{ Тм}^2, \quad (32)$$

$$B_y = 0,2 \times E_b \times I_y = 3603 \text{ Тм}^2, \quad (33)$$

$$q_x = q \times \frac{L_y^4 \times B_x}{L_x^4 \times B_y + L_y^4 \times B_x} = 1 \times \frac{12^4 \times 3125}{12^4 \times 3603 + 12^4 \times 3125} = 0,465 \frac{\text{Т}}{\text{м}^2}, \quad (34)$$

$$q_y = q \times \frac{L_x^4 \times B_y}{L_x^4 \times B_y + L_y^4 \times B_x} = 1 \times \frac{12^4 \times 3603}{12^4 \times 3603 + 12^4 \times 3125} = 0,535 \frac{\text{Т}}{\text{м}^2}, \quad (35)$$

$$M_{B_{1,5X}}^{max} = \alpha \times q_x \times a \times L_x^2 \times n_x = 0,125 \times 0,465 \times 1,5 \times 12^2 \times 1 = 12,6 \text{ Тм}. \quad (36)$$

Коэффициент пропорциональности, учитывающий расположение балки  $B_{2,4Y}$  от опорного контура вдоль оси X.

$$\eta_x = \frac{x}{L_x} = \frac{4,8}{12} = 0,4, \quad (37)$$

$$n_y = \frac{16}{5} \times (\eta_x - 2 \times \eta_x^3 + \eta_x^4) = \frac{16}{5} \times (0,4 - 2 \times 0,4^3 + 0,4^4) = 0,952, \quad (38)$$

$$M_{B_{2,4Y}}^{max} = \alpha \times q_y \times b \times L_y^2 \times n_y = 0,125 \times 0,535 \times 2,4 \times 12^2 \times 0,952 = 22,0 \text{ Тм}. \quad (39)$$

Перекрытие размером в плане  $12,0 \times 12,0$  м с кессонами  $1,5 \times 3,0$  м. Рассматриваем центральные балки  $B_{1,5X}$  и  $B_{3,0Y}$ .

$$B_x = 0,2 \times E_b \times I_x = 3125 \text{ Тм}^2, \quad (40)$$

$$B_y = 0,2 \times E_b \times I_y = 3816 \text{ Тм}^2, \quad (41)$$

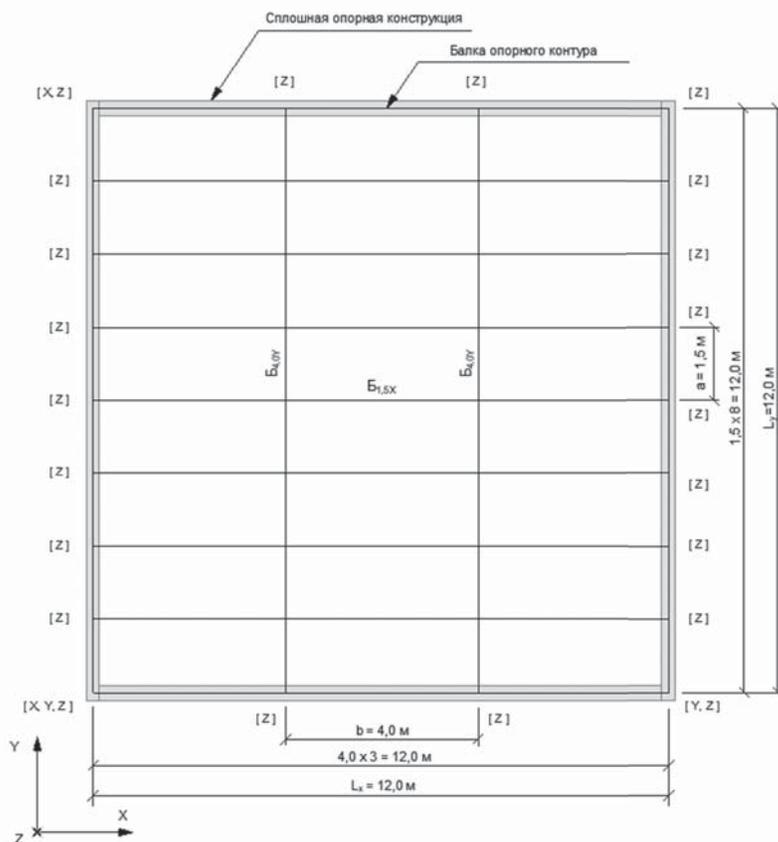
$$q_x = q \times \frac{L_y^4 \times B_x}{L_x^4 \times B_y + L_y^4 \times B_x} = 1 \times \frac{12^4 \times 3125}{12^4 \times 3816 + 12^4 \times 3125} = 0,45 \frac{\text{Т}}{\text{м}^2}, \quad (42)$$

$$q_y = q \times \frac{L_x^4 \times B_y}{L_x^4 \times B_y + L_y^4 \times B_x} = 1 \times \frac{12^4 \times 3816}{12^4 \times 3816 + 12^4 \times 3125} = 0,55 \frac{\text{Т}}{\text{м}^2}, \quad (43)$$

$$M_{B_{1,5X}}^{max} = \alpha \times q_x \times a \times L_x^2 \times n_x = 0,125 \times 0,45 \times 1,5 \times 12^2 \times 1 = 12,15 \text{ Тм}, \quad (44)$$

$$M_{B_{3,0Y}}^{max} = \alpha \times q_y \times b \times L_y^2 \times n_y = 0,125 \times 0,55 \times 3,0 \times 12^2 \times 1 = 29,7 \text{ Тм}. \quad (45)$$

Перекрытие размером в плане 12,0 × 12,0 м с кессонами 1,5 × 4,0 м (рис. 1). Рассматриваем центральные балки B<sub>1,5X</sub> и B<sub>4,0Y</sub>.



**Рис. 1.** Схема кессонного перекрытия размером в плане 12,0 × 12,0 м с кессонами 1,5 × 4,0 м. B<sub>1,5X</sub>, B<sub>4,0Y</sub> – рассчитываемые балки. [X, Y, Z] – связи, установленные в узлах балки опорного контура  
**Fig. 1.** Schematic of a waffle slab of 12,0 × 12,0 m in plan having 1,5 × 4,0 m caissons. B<sub>1,5X</sub>, B<sub>4,0Y</sub> – calculated beams. [X, Y, Z] – connections established in beam nodes of supporting structure

$$B_x = 0,2 \times E_b \times I_x = 3125 \text{ ТМ}^2, \quad (46)$$

$$B_y = 0,2 \times E_b \times I_y = 4073 \text{ ТМ}^2, \quad (47)$$

$$q_x = q \times \frac{L_y^4 \times B_x}{L_x^4 \times B_y + L_y^4 \times B_x} = 1 \times \frac{12^4 \times 3125}{12^4 \times 4073 + 12^4 \times 3125} = 0,434 \frac{\text{Т}}{\text{М}^2}, \quad (48)$$

$$q_y = q \times \frac{L_x^4 \times B_y}{L_x^4 \times B_y + L_y^4 \times B_x} = 1 \times \frac{12^4 \times 4073}{12^4 \times 4073 + 12^4 \times 3125} = 0,566 \frac{\text{Т}}{\text{М}^2}, \quad (49)$$

$$M_{B_{1,5X}}^{\max} = \alpha \times q_x \times a \times L_x^2 \times n_x = 0,125 \times 0,434 \times 1,5 \times 12^2 \times 1 = 11,72 \text{ ТМ}, \quad (50)$$

$$\eta_x = \frac{x}{L_x} = \frac{4,0}{12} = \frac{1}{3}, \quad (51)$$

$$n_y = \frac{16}{5} \times (\eta_x - 2 \times \eta_x^3 + \eta_x^4) = \frac{16}{5} \times \left( \frac{1}{3} - 2 \times \left( \frac{1}{3} \right)^3 + \left( \frac{1}{3} \right)^4 \right) = 0,869, \quad (52)$$

$$M_{B_{4,0Y}}^{\max} = \alpha \times q_y \times b \times L_y^2 \times n_y = 0,125 \times 0,566 \times 4,0 \times 12^2 \times 0,869 = 35,4 \text{ ТМ}. \quad (53)$$

Перекрытие размером в плане ( $L_x \times L_y$ )  $12,0 \times 15,0$  м с кессонами  $1,5 \times 1,5$  м. Рассматриваем центральные балки  $B_{1,5X}$  и  $B_{1,5Y}$ .

$$B_x = 0,2 \times E_b \times I_x = 3125 \text{ ТМ}^2. \quad (54)$$

$$B_y = 0,2 \times E_b \times I_y = 3125 \text{ ТМ}^2. \quad (55)$$

$$q_x = q \times \frac{L_y^4 \times B_x}{L_x^4 \times B_y + L_y^4 \times B_x} = 1 \times \frac{15^4 \times 3125}{12^4 \times 3125 + 15^4 \times 3125} = 0,709 \frac{\text{Т}}{\text{М}^2}, \quad (56)$$

$$q_y = q \times \frac{L_x^4 \times B_y}{L_x^4 \times B_y + L_y^4 \times B_x} = 1 \times \frac{12^4 \times 3125}{12^4 \times 3125 + 15^4 \times 3125} = 0,291 \frac{\text{Т}}{\text{М}^2}, \quad (57)$$

$$M_{B_{1,5X}}^{\max} = \alpha \times q_x \times a \times L_x^2 \times n_x = 0,125 \times 0,709 \times 1,5 \times 12^2 \times 1 = 19,14 \text{ ТМ}, \quad (58)$$

$$M_{B_{1,5Y}}^{\max} = \alpha \times q_y \times b \times L_y^2 \times n_y = 0,125 \times 0,291 \times 1,5 \times 15^2 \times 1 = 12,28 \text{ ТМ}. \quad (59)$$

Перекрытие размером в плане ( $L_x \times L_y$ )  $12,0 \times 18,0$  м с кессонами  $1,5 \times 1,5$  м. Рассматриваем центральные балки  $B_{1,5X}$  и  $B_{1,5Y}$ .

$$B_x = 0,2 \times E_b \times I_x = 3125 \text{ ТМ}^2, \quad (60)$$

$$B_y = 0,2 \times E_b \times I_y = 3125 \text{ ТМ}^2, \quad (61)$$

$$q_x = q \times \frac{L_y^4 \times B_x}{L_x^4 \times B_y + L_y^4 \times B_x} = 1 \times \frac{18^4 \times 3125}{12^4 \times 3125 + 18^4 \times 3125} = 0,835 \frac{\text{Т}}{\text{М}^2}, \quad (62)$$

$$q_y = q \times \frac{L_x^4 \times B_y}{L_x^4 \times B_y + L_y^4 \times B_x} = 1 \times \frac{12^4 \times 3125}{12^4 \times 3125 + 18^4 \times 3125} = 0,165 \frac{\text{Т}}{\text{м}^2}, \quad (63)$$

$$M_{B1,5X}^{max} = \alpha \times q_x \times a \times L_x^2 \times n_x = 0,125 \times 0,835 \times 1,5 \times 12^2 \times 1 = 22,55 \text{ Тм}, \quad (64)$$

$$M_{B1,5Y}^{max} = \alpha \times q_y \times b \times L_y^2 \times n_y = 0,125 \times 0,165 \times 1,5 \times 18^2 \times 1 = 10,0 \text{ Тм}. \quad (65)$$

Перекрытие размером в плане ( $L_x \times L_y$ )  $12,0 \times 21,0$  м с кессонами  $1,5 \times 1,5$  м. Рассматриваем центральные балки  $B_{1,5X}$  и  $B_{1,5Y}$ .

$$B_x = 0,2 \times E_b \times I_x = 3125 \text{ Тм}^2, \quad (66)$$

$$B_y = 0,2 \times E_b \times I_y = 3125 \text{ Тм}^2, \quad (67)$$

$$q_x = q \times \frac{L_y^4 \times B_x}{L_x^4 \times B_y + L_y^4 \times B_x} = 1 \times \frac{21^4 \times 3125}{12^4 \times 3125 + 21^4 \times 3125} = 0,904 \frac{\text{Т}}{\text{м}^2}, \quad (68)$$

$$q_y = q \times \frac{L_x^4 \times B_y}{L_x^4 \times B_y + L_y^4 \times B_x} = 1 \times \frac{12^4 \times 3125}{12^4 \times 3125 + 21^4 \times 3125} = 0,096 \frac{\text{Т}}{\text{м}^2}, \quad (69)$$

$$M_{B1,5X}^{max} = \alpha \times q_x \times a \times L_x^2 \times n_x = 0,125 \times 0,904 \times 1,5 \times 12^2 \times 1 = 24,41 \text{ Тм}, \quad (70)$$

$$M_{B1,5Y}^{max} = \alpha \times q_y \times b \times L_y^2 \times n_y = 0,125 \times 0,096 \times 1,5 \times 21^2 \times 1 = 7,94 \text{ Тм}. \quad (71)$$

Перекрытие размером в плане ( $L_x \times L_y$ )  $12,0 \times 24,0$  м с кессонами  $1,5 \times 1,5$  м. Рассматриваем центральные балки  $B_{1,5X}$  и  $B_{1,5Y}$ .

$$B_y = 0,2 \times E_b \times I_y = 3125 \text{ Тм}^2, \quad (72)$$

$$B_x = 0,2 \times E_b \times I_x = 3125 \text{ Тм}^2, \quad (73)$$

$$q_x = q \times \frac{L_y^4 \times B_x}{L_x^4 \times B_y + L_y^4 \times B_x} = 1 \times \frac{24^4 \times 3125}{12^4 \times 3125 + 24^4 \times 3125} = 0,941 \frac{\text{Т}}{\text{м}^2}, \quad (74)$$

$$q_y = q \times \frac{L_x^4 \times B_y}{L_x^4 \times B_y + L_y^4 \times B_x} = 1 \times \frac{12^4 \times 3125}{12^4 \times 3125 + 24^4 \times 3125} = 0,059 \frac{\text{Т}}{\text{м}^2}, \quad (75)$$

$$M_{B1,5X}^{max} = \alpha \times q_x \times a \times L_x^2 \times n_x = 0,125 \times 0,941 \times 1,5 \times 12^2 \times 1 = 25,41 \text{ Тм}, \quad (76)$$

$$M_{B1,5Y}^{max} = \alpha \times q_y \times b \times L_y^2 \times n_y = 0,125 \times 0,059 \times 1,5 \times 24^2 \times 1 = 6,37 \text{ Тм}. \quad (77)$$

Данные аналитического расчета и компьютерных моделей кессонных перекрытий представлены в табл. 2, 3.

Таблица 2

**Сравнение значений изгибающих моментов в балках центральных зон кессонного перекрытия размером в плане ( $L_x \times L_y$ ) 12,0 × 12,0 м с различными размерами кессонов, полученные аналитическим методом и при помощи компьютерных моделей BK SCAD**

Table 2

**Comparison of bending moment in central beams of a waffle slab of ( $L_x \times L_y$ ) 12.0 × 12.0 m in plan having different caisson dimensions, obtained by the analytical method and computer-assisted calculations using SCAD software**

| Бал-ка            | (1,5 × 1,5 м)<br>$M_y$ , Тм |       | (1,5 × 2,0 м)<br>$M_y$ , Тм |       | (1,5 × 2,4 м)<br>$M_y$ , Тм |       | (1,5 × 3,0 м)<br>$M_y$ , Тм |       | (1,5 × 4,0 м)<br>$M_y$ , Тм |       |
|-------------------|-----------------------------|-------|-----------------------------|-------|-----------------------------|-------|-----------------------------|-------|-----------------------------|-------|
|                   | Аналитиче-ский              | SCAD  |
| Б <sub>1,5X</sub> | 13,5                        | 13,58 | 12,9                        | 14,91 | 12,6                        | 15,95 | 12,2                        | 16,72 | 11,7                        | 18,66 |
| Б <sub>1,5Y</sub> | 13,5                        | 13,58 |                             |       |                             |       |                             |       |                             |       |
| Б <sub>2,0Y</sub> |                             |       | 18,8                        | 16,25 |                             |       |                             |       |                             |       |
| Б <sub>2,4Y</sub> |                             |       |                             |       | 22,0                        | 17,14 |                             |       |                             |       |
| Б <sub>3,0Y</sub> |                             |       |                             |       |                             |       | 29,7                        | 20,15 |                             |       |
| Б <sub>4,0Y</sub> |                             |       |                             |       |                             |       |                             |       | 35,4                        | 20,03 |

Таблица 3

**Сравнение значений изгибающих моментов в балках центральных зон кессонного перекрытия с размерами кессонов 1,5 × 1,5 м различными пролетами ( $L_x \times L_y$ ), полученные аналитическим методом и при помощи компьютерных моделей BK SCAD**

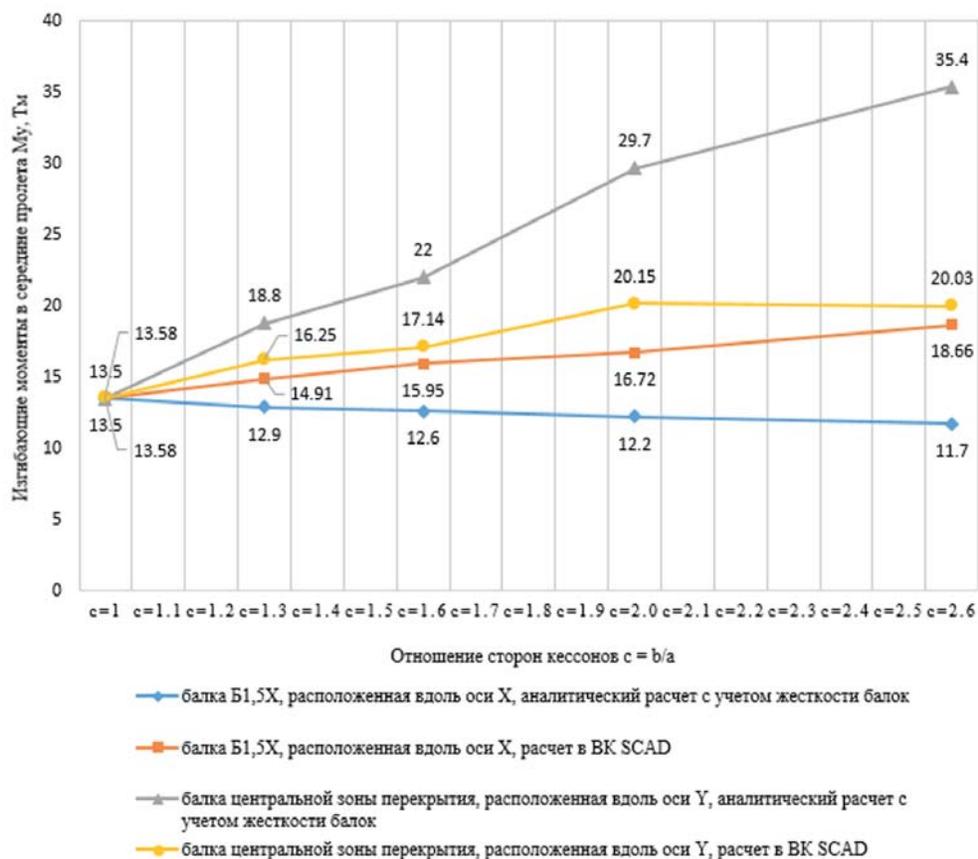
Table 3

**Comparison of bending moment in beams of central waffle slabs having 1.5 × 1.5 m caisson and various spans ( $L_x \times L_y$ ), obtained by analytical method and computer-assisted calculations using SCAD software**

| Бал-ка            | (12,0 × 12,0 м)<br>$M_y$ , Тм |       | (12,0 × 15,0 м)<br>$M_y$ , Тм |       | (12,0 × 18,0 м)<br>$M_y$ , Тм |       | (12,0 × 21,0 м)<br>$M_y$ , Тм |              | (12,0 × 24,0 м)<br>$M_y$ , Тм |               |
|-------------------|-------------------------------|-------|-------------------------------|-------|-------------------------------|-------|-------------------------------|--------------|-------------------------------|---------------|
|                   | Аналитиче-ский                | SCAD  | Аналитиче-ский                | SCAD  | Аналитиче-ский                | SCAD  | Аналитиче-ский                | SCAD         | Аналитиче-ский                | SCAD          |
| Б <sub>1,5X</sub> | 13,5                          | 13,58 | 19,14                         | 20,02 | 22,55                         | 24,32 | 24,41                         | 26,83        | 25,41                         | 28,15         |
| Б <sub>1,5Y</sub> | 13,5                          | 13,58 | 12,28                         | 12,12 | 10                            | 9,56  | 7,94                          | 7,0<br>8,33* | 6,37                          | 4,84<br>7,81* |

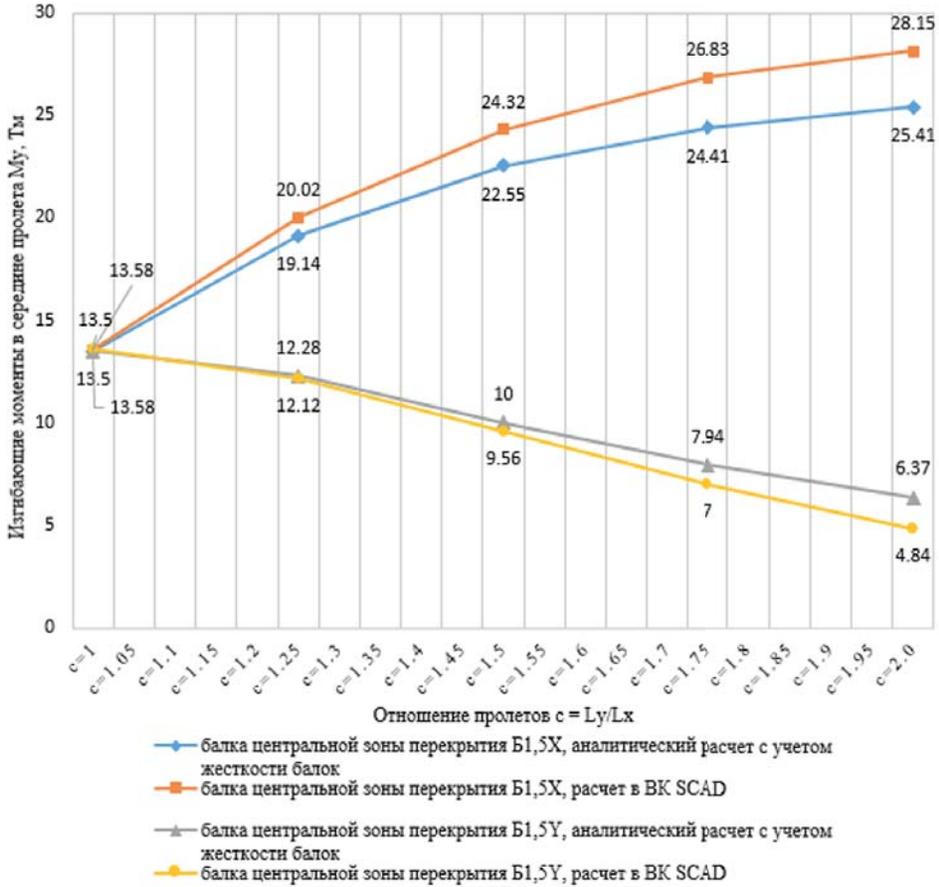
*Примечание:* \* – В моделях BK SCAD перекрытий размером 12,0 × 21,0 м и 12,0 × 24,0 м максимальные изгибающие моменты в балках длинной стороны находятся не в середине пролета, эпюра изгибающих моментов отклоняется от параболы. Данный эффект отмечается в работе [14] в плите, опертой по контуру, при соотношении сторон  $L_y = 2 \times L_x$

*Note:* \* – In the slab models of 12.0 × 21.0 m and 12.0 × 24.0 m built in the SCAD software, the maximum bending moments in the beams of a long side are located off-center in a span; a bending-moment curve deviates from a parabola. This effect is described in work [14] for an edge-supported slab, having an aspect ratio of  $L_y = 2 \times L_x$



**Рис. 2.** Графики зависимости изгибающих моментов  $M_y, T_m$  от размеров кессонов в балках центральных зон перекрытий размером в плане  $(L_x \times L_y)$  12,0 × 12,0 м при расчете аналитическим методом с учетом жесткости отдельных балок и в вычислительном комплексе SCAD

**Fig. 2.** Bending moments  $M_y$  and  $T_m$  as a function of caisson dimensions in beam of central slabs of  $(L_x \times L_y)$  12.0 × 12.0 m in plan obtained by analytical calculations considering individual beam rigidity and using SCAD software



**Рис. 3.** Графики зависимости изгибающих моментов  $M_y$ ,  $T_m$  от соотношения пролетов  $L_y/L_x$  кессонных перекрытий в балках центральных зон перекрытий с кессонами  $1,5 \times 1,5$  м при расчете аналитическим методом с учетом жесткости отдельных балок и в вычислительном комплексе SCAD

**Fig. 3.** Bending moments  $M_y$  and  $T_m$  as a function of ratio of spans  $L_y/L_x$  of waffle slab in beams of central slabs having  $1.5 \times 1.5$  m caisson, obtained by analytical calculations considering individual beam rigidity and using SCAD software

## Результаты

Полученные данные при расчете в BK SCAD конструкции перекрытия размером в плане ( $L_x \times L_y$ ) 12,0 × 21,0 м с кессонами 1,5 × 1,5 м представлены на рис. 4, 5.

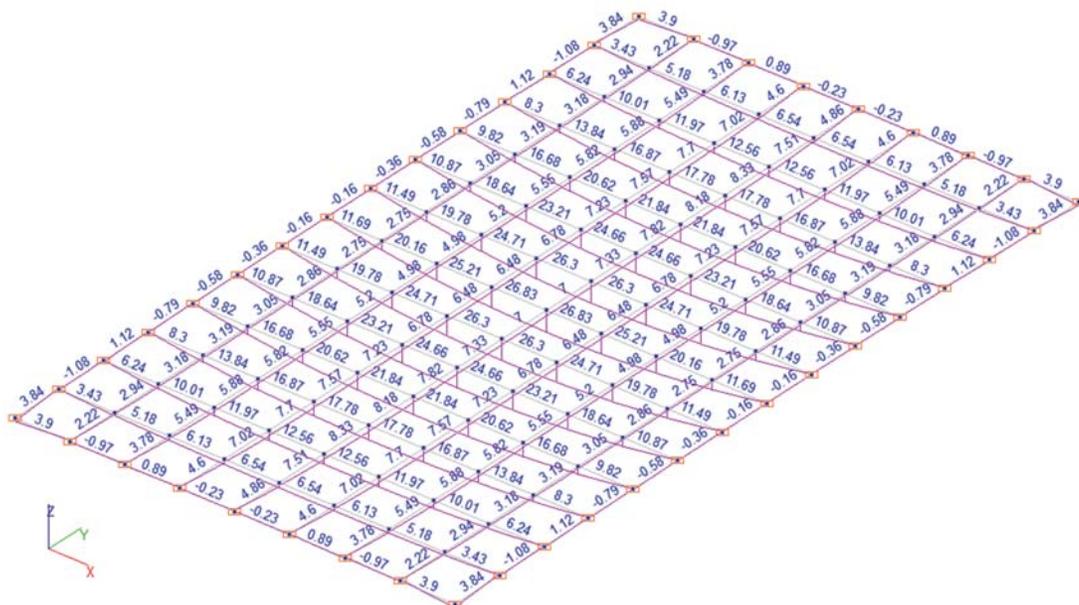


Рис. 4. Эпюры изгибающих моментов  $M_y$ , Тм в балках модели SCAD перекрытия размером в плане ( $L_x \times L_y$ ) 12,0 × 21,0 м с кессонами 1,5 × 1,5 м

Fig. 4.  $M_y$  and Тм bending moment curves in beams of SCAD slab model of ( $L_x \times L_y$ ) 12.0 × 21.0 m in plan having 1.5 × 1.5 m caissons

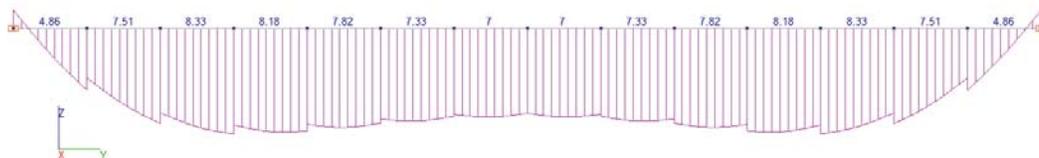


Рис. 5. Эпюра изгибающих моментов  $M_y$ , Тм в центральной балке, расположенной вдоль оси Y модели SCAD перекрытия размером в плане ( $L_x \times L_y$ ) 12,0 × 21,0 м с кессонами 1,5 × 1,5 м

Fig. 5.  $M_y$  and Тм bending moment curves in beams of SCAD slab model of ( $L_x \times L_y$ ) 12.0 × 21.0 m in plan having 1.5 × 1.5 m caissons

## Выводы

1. Значения изгибающих моментов в балках перекрытия квадратного в плане с квадратными кессонами, вычисленные аналитическим способом с учетом величин пролетов, жесткостей отдельных балок и методом конечных элементов вычислительного комплекса SCAD, совпадают, что является частным случаем.
2. Значения изгибающих моментов в балках перекрытия прямоугольного в плане с квадратными кессонами, вычисленные аналитическим методом с учетом величин пролетов,

жесткостей отдельных балок и методом конечных элементов вычислительного комплекса SCAD при соотношении сторон перекрытия  $L_{\max}/L_{\min}$  не более 1,5, имеют отклонение менее 8 %.

3. При соотношении пролетов прямоугольного перекрытия с квадратными кессонами более 1,5 максимальные изгибающие моменты в балках большего пролета располагаются вне его центра, эпюра изгибающих моментов не является квадратной параболой.

4. Значения изгибающих моментов в балках перекрытия квадратного в плане с прямоугольными кессонами, вычисленные аналитическим методом с учетом величин пролетов, жесткостей отдельных балок и методом конечных элементов вычислительного комплекса SCAD, значительно отличаются. Отличия возрастают с увеличением отношения сторон кессонов.

5. Дальнейшим исследованием точности аналитического метода определения усилий в балках железобетонных кессонных перекрытий может быть сравнение изгибающих моментов, вычисленных аналитическим методом с учетом жесткости перекрытия (суммарной жесткости параллельных балок) и методом конечных элементов.

## Список литературы

1. Залигер Р. Железобетон: его расчет и проектирование. Москва – Ленинград: Изд-во ГНТИ; 1931.
2. Линович Л.Е. Расчет и конструирование частей гражданских зданий. Киев: Будівельник; 1972.
3. Вахненко П.Ф., Хилобок В.Г., Андрейко Н.Т., Яровой М.Л. Расчет и конструирование частей жилых и общественных зданий: справочник проектировщика. Киев: Будівельник; 1987.
4. Улицкий И.И., Ривкин С.А., Самолетов М.В., Дыховичный А.А., Френкель М.М., Кретов В.И. Железобетонные конструкции. Киев: Будівельник; 1972.
5. Малахова А.Н. Монолитные кессонные перекрытия зданий. Вестник МГСУ. 2013;(1):79–86.
6. Иванов-Дятлов И.Г. Железобетонные конструкции. Москва, Ленинград: Министерство коммунального хозяйства РСФСР; 1950.
7. Карпунин Н.С. Железобетонные конструкции. Москва: Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре; 1957.
8. Мурашев В.И., Сигалов Э.Е., Байков В.Н. Железобетонные конструкции. Общий курс. М.: Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам; 1962.
9. Мозголов М.В., Туранова А.В. Об эффективности косых кессонных железобетонных перекрытий. Градостроительство и архитектура. 2021;11(3):20–25. <https://doi.org/10.17673/Vestnik.2021.03.03>.
10. Мозголов М.В., Козлова Е.В. К вопросу создания верификационной модели для расчета кессонного железобетонного перекрытия в вычислительном комплексе SCAD. Вестник НИЦ «Строительство». 2022;32(1):128–140. [https://doi.org/10.37538/2224-9494-2022-1\(32\)-128-140](https://doi.org/10.37538/2224-9494-2022-1(32)-128-140)
11. Шибяева В.Д. Исследование напряженно-деформированного состояния монолитных кессонных перекрытий. Молодой ученый. 2021;(16):119–123.
12. Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Маляренко А.А., Фиалко С.Ю., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А. SCADOffice. Версия 21. Вычислительный комплекс SCAD ++ /–. Москва: СКАД СОФТ; 2015.
13. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. Москва: ДМК Пресс; 2007.
14. Бушков В.А. Железобетонные конструкции. II часть. Москва: Стройиздат Наркомстроя; 1941.
15. Лоскутов И.С. Монолитные железобетонные кессонные перекрытия [Интернет]. DWG.ru: Железобетонные конструкции [Интернет]. Режим доступа: <https://dwg.ru/lib/2046> [дата доступа: 24.10.2021].
16. Плоские безбалочные железобетонные перекрытия [Интернет]. Москва; 2017. Режим доступа: [https://www.faufcc.ru/upload/methodical\\_materials/mp60\\_2017.pdf](https://www.faufcc.ru/upload/methodical_materials/mp60_2017.pdf) [дата доступа 22.11.2021].

## References

1. *Saliger R.* Der eisenbeton. Seine berechnung und gestaltung [Reinforced concrete its calculation and design]. Kröner; 1920 (in German).
2. *Linovich L.E.* Calculation and construction of parts of civil buildings. Kiev: Budivel'nik Publ.; 1972 (in Russian).
3. *Vahnenko P.F., Hilobok V.G., Andrejko N.T., Jarovoi M.L.* Calculation and construction of parts of residential and public buildings. The designer's reference book. Kiev: Budivel'nik Publ.; 1987 (in Russian).
4. *Ulitskiy I.I., Rivkin S.A., Samoletov M.V., Dykhovichnyi A.A., Frenkel' M.M., Kretov V.I.* Reinforced concrete structures. Kiev: Budivel'nik Publ.; 1972 (in Russian).
5. *Malakhova A.N.* Monolithic caisson floors of buildings. Vestnik MGSU. 2013;(1):79–86 (in Russian).
6. *Ivanov-Dyatlov I.G.* Reinforced concrete structures Moscow, Leningrad: Ministry of Public Utilities of the RSFSR; 1950 (in Russian).
7. *Karpukhin N.S.* Reinforced concrete structures. Moscow: State Publishing House of Literature on Construction and Architecture; 1957 (in Russian).
8. *Murashev V.I., Sigalov E.E., Baykov V.N.* Reinforced concrete structures. General course. Moscow: State Publishing House of Literature on Construction, Architecture and Building Materials; 1962 (in Russian).
9. *Mozgolov M.V., Turanova A.V.* On the effectiveness of oblique caisson reinforced concrete floors. Gradostroitel'stvo i arkhitektura = Urban construction and architecture. 2021;11(3):20–25 (in Russian). <https://doi.org/10.17673/Vestnik.2021.03.03>
10. *Mozgolov M.V., Kozlova E.V.* Creation of a SCAD verification model for the design calculations of a reinforced-concrete waffle slab floor system. Vestnik NIC Stroitel'stvo = Bulletin of Science and Research Center of Construction. 2022;32(1):128–140 (in Russian). [https://doi.org/10.37538/2224-9494-2022-1\(32\)-128-140](https://doi.org/10.37538/2224-9494-2022-1(32)-128-140)
11. *Shibaeva V.D.* Investigation of the stress-strain state of monolithic coffered ceilings. Molodoi uchenyi [Young Scientist]. 2021;(16):119–123 (in Russian).
12. *Karpilovskiy V.S., Kriksunov E.Z., Malyarenko A.A., Fialko S.Yu., Perel'muter A.V., Perel'muter M.A.* SCAD Office. Version 21. The SCAD ++computing complex. Moscow; SKAD SOFT Publ.; 2015 (in Russian).
13. *Perel'muter A.V., Slivker V.I.* Design models of structures and the possibility of their analysis. Moscow: DMK Press Publ.; 2007 (in Russian).
14. *Bushkov V.A.* Reinforced concrete structures. Part II. Moscow: Stroizdat Narkomstroj; 1941 (in Russian).
15. *Loskutov I.S.* Monolithic reinforced concrete coffered floors. DWG.ru [Internet]. Available at: <https://dwg.ru/lib/2046> (in Russian).
16. Flat girderless reinforced concrete floors [Internet]. Moscow; 2017. Available at: [https://www.faufcc.ru/upload/methodical\\_materials/mp60\\_2017.pdf](https://www.faufcc.ru/upload/methodical_materials/mp60_2017.pdf) (in Russian).

## Информация об авторах / Information about the authors

**Михаил Валентинович Мозголов**, канд. техн. наук, доцент кафедры «Строительное производство» Коломенского института (филиала) ФГБОУ ВО «Московский политехнический университет», Коломна  
e-mail: [mvmozgolov@yandex.ru](mailto:mvmozgolov@yandex.ru)

**Mikhail V. Mozgolov**, Cand. Sci. (Engineering), Associate Professor of the Department of Construction Works, Kolomna Institute (Branch), Moscow Polytechnic University, Kolomna  
e-mail: [mvmozgolov@yandex.ru](mailto:mvmozgolov@yandex.ru)

**Елизавета Вадимовна Козлова**✉, студент 3-го года обучения направления «Строительство» Коломенского института (филиала) ФГБОУ ВО «Московский политехнический университет», Коломна  
e-mail: [lizakozlova2014@gmail.com](mailto:lizakozlova2014@gmail.com)

**Elizaveta V. Kozlova**✉, 3rd year student on "Construction", Kolomna Institute (Branch), Moscow Polytechnic University, Kolomna  
e-mail: [lizakozlova2014@gmail.com](mailto:lizakozlova2014@gmail.com)

✉ Автор, ответственный за переписку / Corresponding author