УДК 624.046
https://doi.org/10.37538/2224-9494-2023-3(38)-155-167 EDN: YGYKIE

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА В ЗАДАЧАХ РАСЧЕТА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ И ХАРАКТЕРЕ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

Ю.Т. ЧЕРНОВ, д-р техн. наук

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» (НИУ МГСУ), Ярославское шоссе, д. 26, г. Москва, 129337, Российская Федерация

Аннотация

Введение. Разработка методов расчета нелинейных систем является актуальной областью исследования в связи с тем, что линейная теория не всегда позволяет достоверно описать свойства динамических систем, а для целого ряда случаев линейное приближение дает лишь очень грубое представление о рассматриваемых процессах.

Цель. При расчете линейных систем и записи разрешающих уравнений для нелинейных систем используются передаточные и импульсные переходные функции линейных «порождающих» систем дифференциальных уравнений. Подобный подход по сравнению с традиционным методом «нормальных форм» позволяет значительно упростить алгоритм расчета, исключив из него несколько этапов и представить решение в виде разложения по формам собственных колебаний линейных систем непосредственно относительно обобщенных координат.

Материалы и методы. В статье приведен разработанный метод и алгоритм расчета нелинейных систем с конечным числом степеней свободы при произвольных динамических воздействиях и характере физической нелинейности. В качестве разрешающих уравнений рассматриваются нелинейные интегральные уравнения второго рода, к которым сводятся системы нелинейных дифференциальных уравнений колебаний. Решение строится шагами по времени, величина которого в том числе определяет точность решения и характер численного алгоритма.

Результаты. Основные расчетные зависимости представлены в статье в обобщенном виде и удобны для численного моделирования. Приводятся решения для нелинейной системы с одной степенью свободы при кубической зависимости «реакция–перемещение» и системы с одной и двумя степенями свободы с демпфером вязкого трения. В обоих случаях построенное решение содержит все особенности нелинейных систем. В частности, скачок (переход) с верхней возрастающей ветви на нижнюю, устойчивую, и связанное с этим возбуждение свободных колебаний.

Выводы. Как показали результаты расчетов, возникновение в колебательных системах нелинейных эффектов весьма положительно сказывается на поведении динамических систем, в частности, в резонансных режимах.

Ключевые слова: интегральные уравнения второго рода, нелинейная динамическая система, выключающаяся связь, элемент с нелинейной характеристикой, импульсная переходная функция, передаточная функция, «порождающая» система

Для цитирования: Чернов Ю.Т. Интегральные уравнения второго рода в задачах расчета нелинейных систем с конечным числом степеней свободы при произвольных динамических воздействиях и характере физических зависимостей. *Вестник НИЦ «Строительство».* 2023;38(3):155–167. https://doi.org/10.37538/2224-9494-2023-3(38)-155-167

Вклад автора
Автор берет на себя ответственность за все аспекты работы над статьей.

Финансирование
Исследование не имело спонсорской поддержки.

Конфликт интересов
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию 14.06.2023
Поступила после рецензирования 06.07.2023
Принята к публикации 11.07.2023

INTEGRAL EQUATIONS OF THE SECOND KIND IN DYNAMIC ANALYSIS OF NONLINEAR SYSTEMS WITH A FINITE NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM UNDER ARBITRARY DYNAMIC LOADING AND MATERIAL DEPENDENCIES

Yu.T. CHERNOV, Dr. Sci. (Engineering)
Moscow State University of Civil Engineering, Yaroslavskoye Shosse, 26, Moscow, 129337, Russian Federation

Abstract

Introduction. Development of computational methods for nonlinear systems possesses a significant potential, considering that linear theory sometimes fails to accurately describe the properties of dynamic systems, and the linear approximation gives only a very rough idea of real processes for a number of cases.

Aim. Calculating linear systems and deriving the resulting equations for nonlinear systems involves impulse response and transfer functions of linear “generating” systems of differential equations. Such an approach in comparison with the traditional method of the so-called normal forms enables the calculation algorithm to be simplified considerably, avoiding several stages and presenting the solution by means of the normal mode method for linear systems directly with respect to the generalized coordinates.

Materials and methods. The paper presents a method and an algorithm developed for the calculation of nonlinear systems with a finite number of degrees of freedom under arbitrary dynamic loading and material non-linearity. Systems of nonlinear differential equations were reduced to nonlinear integral equations of the second kind, considered as resulting equations. The solution was developed in time steps, the value of which, among other things, determines the accuracy of the solution and the nature of the computational algorithm.

Results. The paper presents main computational dependencies in a generalized form, convenient for numerical simulation. The author provides solutions for a nonlinear system with one degree of freedom and a cubic reaction-displacement relation, as well as for a system with one and two degrees of freedom with a viscous damper. In both cases, the developed solution contains all properties of nonlinear systems, including the jump (transition) from the upper ascending branch to the lower, stable one, and the associated excitation of free oscillations.

Conclusions. According to the calculations, the occurrence of nonlinear effects in oscillating systems makes positive impact on their behavior, in resonant modes in particular.

Keywords: integral equations of the second kind, nonlinear dynamic system, lock-out brace, nonlinear element, impulse response function, transfer function, “generating” system

For citation: Chernov Yu.T. Integral equations of the second kind in dynamic analysis of nonlinear systems with a finite number of degrees of freedom under arbitrary dynamic loading and material dependencies. *Vestnik NIC Stroitel'stvo = Bulletin of Science and Research Center of Construction.* 2023;38(3):155–167. (In Russian). https://doi.org/10.37538/2224-9494-2023-3(38)-155-167

Author contribution statements
The author takes responsibility for all the aspects of the article.

Funding
No funding support was obtained for the research.

Conflict of interest
The author declares no conflict of interest.

Received 14.06.2023
Revised 06.07.2023
Accepted 11.07.2023

Введение

Методы исследования нелинейных колебаний систем, связанные с преобразованием нелинейных уравнений движения систем с конечным числом степеней свободы к нелинейным интегральным уравнениям второго рода, достаточно широко распространены в научно-технической литературе [1–3]. В основном речь идет о построении амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) и их анализе.

Между тем, воспользовавшись импульсными переходными функциями (ИПФ) исходных линейных «порождающих» уравнений, нелинейные дифференциальные уравнения могут быть записаны в виде систем нелинейных интегральных уравнений второго рода, которые, по существу, и определяют полное решение исходной системы в виде суммы двух интегралов типа свертки. Один из возможных алгоритмов вычисления подобных интегралов дан, в частности, в статье [4].

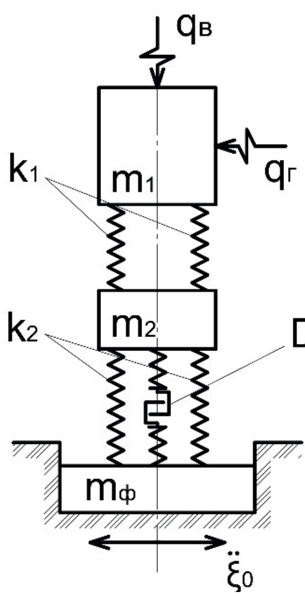
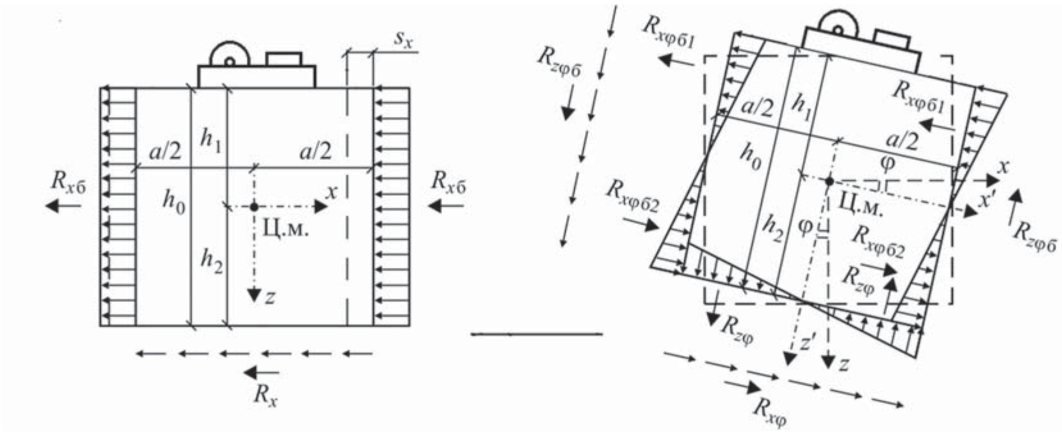


Рис. 1. Расчетная схема системы с двумя степенями свободы: k_i – жесткости связей; D_0 – демпфер вязкого трения

Fig. 1. Computational scheme of a system with two degrees of freedom: k_i – bracing stiffness; D_0 – viscous damper

При построении решений системы линейных «порождающих» уравнений колебаний использовались фундаментальные зависимости для линейных систем общего вида, приведенные в [5], и несколько более детально для систем с конечным числом степеней свободы в [3].

Общая схема и алгоритм расчета нелинейных систем с конечным числом степеней свободы проиллюстрированы на примере расчета системы с двумя степенями свободы (рис. 1).



а **б**

Рис. 2. Реакции в системе «фундамент-грунт» при горизонтальных (*а*) и вращательных (*б*) колебаниях
Fig. 2. Reactions in the "foundation-soil" system under horizontal (*a*) and rotational (*б*) oscillations

Сходимость, устойчивость и точность решений нелинейных систем, построенных используя, в частности, принятый в статье алгоритм, оценивались по результатам расчета двух нелинейных систем с одной степенью свободы.

Стоит отметить, что принятая расчетная схема достаточно широко используется при расчетах различных типов виброзащитных систем: виброизоляции, динамических гасителей колебаний и т. п. – с линейными и нелинейными характеристиками. Подобный алгоритм позволил записать решения линейных уравнений практически в замкнутом виде [2] и в качестве второго примера – решение уравнений плоских горизонтально-вращательных колебаний массивных тел (фундаментов), в том числе заглубленных в грунт [1] (рис. 2).

Материалы и методы

Процесс построения полного алгоритма расчета нелинейных систем с конечным числом степеней свободы можно разделить на несколько этапов.

На начальном этапе дифференциальные уравнения колебаний систем при нелинейной зависимости «жесткость–перемещение» следует представить в виде (1), записав нелинейные составляющие в правой части:

$$\begin{cases} m_1\ddot{y}_1 + \left(1 + 2\nu_1\dfrac{d}{dt}\right)k_1(y_1 - y_2) = q_1(t) + \Phi_1(y_1, y_2), \\ m_2\ddot{y}_2 - \left(1 + 2\nu_1\dfrac{d}{dt}\right)k_1(y_1 - y_2) + \left(1 + 2\nu_2\dfrac{d}{dt}\right)k_2y_2 = q_2(t) - \Phi_1(y_1, y_2) + \Phi_2(y_2); \end{cases} \tag{1}$$

где для дальнейшего сокращения записей обозначено:

$$\Phi_1(y_1, y_2) = \left(1 + 2\nu_1\frac{d}{dt}\right)[k_1 - c_1(\Delta y)](y_1 - y_2);$$
$$\Phi_2(y_2) = \left(1 + 2\nu_2\frac{d}{dt}\right)[k_2 - c_2(y_2)]y_2. \tag{2}$$

k_1, k_2 – жесткости упругих связей;
v_1, v_2 – коэффициент затухания в упругих связях;
$\Delta y = y_1 - y_2$.

Передаточные (ПФ) и импульсные переходные (ИПФ) функции этой системы определяют вид интегральных уравнений, которые, по существу, и являются решением системы нелинейных дифференциальных уравнений. Значение этих функций вычисляют из расчета линейной («порождающей») системы уравнений при:

$$q_i(t) = Q_i e^{i\omega t} \text{ – силовых;}$$
$$q_i(t) = -\ddot{\xi}_0 M e^{i\omega t} \text{ – кинематических воздействиях.} \tag{3}$$

где Q_i – амплитудные значения усилий;

$\ddot{\xi}_0$ – закон смещения основания;

ω – частота вынужденных колебаний.

В матричном виде эту систему следует записать так:

$$M\ddot{\vec{y}} + C\dot{\vec{y}} + K\vec{y} = \vec{Q}e^{i\omega t}(-\ddot{\xi}_0 M e^{i\omega t}); \tag{4}$$

где

$$M = \begin{vmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{vmatrix}, K = \begin{vmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{vmatrix} \tag{5}$$

– матрицы масс и жесткости.

Используя известные зависимости [2, 5], решения подобных систем могут быть представлены в виде разложения по формам собственных колебаний при том, что каждая составляющая полного решения определяется из решения систем уравнений – по структуре систем с одной степенью свободы, диссипативные силы в которых можно учесть, добавив в каждое из них дополнительные слагаемые пропорциональные скорости колебаний.

В работе, в частности, используется модифицированная модель Фойгта с основным параметром γ – коэффициентом неупругого сопротивления. Такая модель принята во многих нормативных документах [6, 7], где приводятся также значения этого параметра для различных материалов и сред.

Подобная схема построения алгоритмов расчета более детально дана на примере расчета системы (1).

Следующий этап расчета – вычисление ПФ и ИПФ системы линейных уравнений (4).

Следуя общей схеме вычисления передаточных функций линейной системы [2], подставим в (4):

$$\vec{y} = \vec{Y}e^{i\omega t} = \vec{Q}\vec{H}e^{i\omega t} \text{ – при силовом и}$$
$$\vec{y}_к = \vec{Y}_к e^{i\omega t} = -\ddot{\xi}_0 M\vec{H}e^{i\omega t} \text{ – при кинематическом воздействии,} \tag{6}$$

где $\vec{H}$ – передаточная функция, и, после сокращения на $e^{i\omega t}$, запишем систему уравнений относительно элементов вектора $\vec{Y}$:

$$[(1 + i\omega 2v_1)k_1 - m_1\omega^2]Y_1 - (1 + i\omega 2v_1)k_1 Y_2 = Q_1;$$
$$-(1 + i\omega 2v_1)k_1 Y_1 + [(1 + i\omega 2v_1)k_1 + (1 + i\omega 2v_2)k_2 - m_2\omega^2]Y_2 = Q_2.$$

Из решения которой следует:

$$Y_1 = \frac{Q_1(k_1 + k_2 - m_2\omega^2) + Q_2 k_1}{D} = \frac{Q_1\Phi_{11} + Q_2\Phi_{12}}{D};$$
$$Y_2 = \frac{Q_1 k_1 + Q_2(k_1 - m_1\omega^2)}{D} = \frac{Q_1\Phi_{21} + Q_2\Phi_{22}}{D}. \qquad (7)$$

где Φ_{ij} – приближенная (без учета диссипативных сил) амплитуда перемещений i-й массы при действии единичной силы $1 \times e^{i\omega t}$ на j-ю массу;

D – определитель системы (4), который для сокращения выкладок удобно после некоторых преобразований записать в виде:

$$D = m_1 m_2\{\omega^4 - (h_1 + h_1 s_1 + 1)p_{01}^2\omega^2 + p_{01}^2 p_{02}^2\} = m_1 m_2 N(\omega), \qquad (8)$$

где $h_1 = \frac{m_1}{m_2};\ s_1 = \frac{k_2}{k_1};\ p_{01}^2 = \frac{k_1}{m_1};\ p_{02}^2 = \frac{k_2}{m_2};\ \frac{p_{02}^2}{p_{01}^2} = h_1 s_1.$ (9)

Полагая в (8) $\omega = p$ и приравняв определитель к нулю, вычислим корни частотного уравнения (значения собственных частот) по формуле:

$$p_{2(1)}^2 = \left(\frac{\varphi_1}{2} \pm \sqrt{\frac{\varphi_1^2}{4} - h_1 s_1}\right)p_{01}^2, \qquad (10)$$

где $\varphi_1 = h_1 + h_1 s_1 + 1$.

Следуя общей схеме построения ПФ [3, 5], определитель системы (4) и его производную по ω^2 запишем в виде:

$$D(\omega^2) = m_1 m_2(\omega^2 - p_1^2)(\omega^2 - p_2^2); \qquad (11)$$

$$\frac{dD}{d\omega^2} = m_1 m_2[(\omega^2 - p_1^2) + (\omega^2 - p_2^2)]. \qquad (12)$$

Общий алгоритм вычисления передаточных функций можно показать на примере системы (4). Для этого формулу для ПФ, записанную в виде

$$H(\omega^2) = \frac{L(p_i)}{m_1 m_2 \prod_{r=1}^{2}(\omega^2 - p_r^2)}, \qquad (а)$$

где $L(p_i)$ – некоторая функция частоты.

Следует преобразовать и представить как сумму отдельных составляющих:

$$H(\omega^2) = \frac{L(\omega^2)}{D(\omega^2)} = \frac{1}{m_1 m_2}\sum_{r=1}^{2}\frac{K_r}{\omega^2 - p_r^2}; \qquad (б)$$

где p_r – корни уравнения (8) (частоты собственных колебаний), т. е., по существу, в виде разложения по формам собственных колебаний «порождающей» системы, в которой коэффициенты K_r, следуя известной схеме [2], следует определять по формуле:

$$K_r = \frac{L(p_r^2)}{\left[\frac{d}{d\omega^2}D(\omega^2)\right]_{\omega^2 = p_r^2}} \qquad (в)$$

Из (б) и (в) следуют общие зависимости для передаточных функций системы (4) также в виде разложения по формам собственных колебаний

$$H_{ij} = \frac{1}{m_1 m_2 (p_2^2 - p_1^2)} \sum_{r=1}^{2} (-1)^{r+1} \frac{L_{ij}(p_r^2)}{p_r^2 - \omega^2 + i\omega p_r^2 2\nu_r}, \tag{13}$$

где $L_{11} = k_1 + k_2 - m_2 p_r^2$; $L_{12} = L_{21} = k_1$; $L_{22} = k_1 - m_1 p_r^2$. (14)

Последнее слагаемое в знаменателе в (13) позволяет учитывать диссипативные силы, используя наиболее подходящие для конкретных задач модели. Ранее уже было сказано, что в работе далее используется модифицированная гипотеза Фойгта при $\nu_r = \frac{\gamma_r}{2\omega}$.

Передаточные и импульсные переходные функции для общих случаев линейных систем определены в [2].

Для систем с конечным числом степеней свободы алгоритм расчета ИПФ можно несколько упростить, если учесть, что ПФ подобных систем определяются в виде суммы решений систем уравнений по форме систем с одной степенью свободы. В частности, для

$$\ddot{y}_r + \left(1 + \frac{\gamma_r}{p_r}\frac{d}{dt}\right) p_r^2 y = D_r e^{i\omega t}, \text{ при } r = 1 \ldots n, \tag{15}$$

где D_r – некоторая функция частоты p_r.

ИПФ уравнения (15) удобно записать, воспользовавшись одним из решений для свободных колебаний $y_r = D_r \frac{\dot{y}}{p_r} \sin p_r t$ и теоремой сохранения количества движения $S = m\dot{y}$, в окончательном виде так

$$k_r = D_r \frac{S}{p_r} e^{-\frac{\gamma}{2} p_r t} \sin p_r t. \tag{16}$$

Из (13) и (16) следуют такие общие зависимости для ИПФ системы (4)

$$K_{ij}(p_r) = \frac{1}{M(p_r)} \sum_{r=1}^{2} (-1)^{r+1} \frac{L_{ij}(p_r)}{p_r^*} e^{-n_r t} \sin p_r^* t = \sum_{r=1}^{2} (-1)^{r+1} H_{ij}(p_r)\, e^{-n_r t} \sin p_r^* t, \tag{17}$$

где $p_r^* = p_r \sqrt{\left(1 - \frac{\gamma_r^2}{4}\right)}$; $n_r = \frac{\gamma_r}{2} p_r$; $M(p_r) = m_1 m_2 (p_2^2 - p_1^2)$; $H_{ij}(p_r) = \frac{1}{M(p_r)} \frac{L_{ij}(p_r)}{p_r^*}$. (18)

Определив ИПФ из решения системы линейных дифференциальных уравнений (4), решения нелинейной системы (1) можно записать в виде нелинейных интегральных уравнений второго рода. В частности, для несколько упрощенного варианта – при $c_1(\Delta y) = K_1$; $c_2(y_2) \neq K_2$, общее решение системы (1) будет определяться интегралами:

$$y_1(t) = y_{01}(t) + W_{01}(t)$$

где

$$y_{01}(t) = \int_0^t \left\{ \left(q_1(\tau) \sum_{r=1}^{2} (-1)^{r+1} H_{11}(p_r) + \right.\right. \tag{19}$$

$$\left.\left. + q_2(\tau) \sum_{r=1}^{2} (-1)^{r+1} H_{12}(p_r) \right) e^{-\frac{\gamma}{2} p_r (t-\tau)} \sin p_r^* (t - \tau) \right\} d\tau;$$

$$W_{01}(t) = \int_0^t \left\{ \Phi_2(\tau) \sum_{r=1}^{2} (-1)^{r+1} H_{12}(p_r)\, e^{-\frac{\gamma}{2} p_r (t-\tau)} \sin p_r^* (t-\tau) \right\} d\tau; \tag{20}$$

$$y_{02}(t) = \int_0^t \left\{ \left(q_1(\tau) \sum_{r=1}^{2} (-1)^{r+1} H_{21}(p_r) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + q_2(\tau) \sum_{r=1}^{2} (-1)^{r+1} H_{22}(p_r) \right) e^{-\frac{\gamma}{2} p_r (t-\tau)} \sin p_r^* (t-\tau) \right\} d\tau; \tag{21}$$

$$W_{02}(t) = \int_0^t \left\{ \Phi_2(\tau) \sum_{r=1}^{2} (-1)^{r+1} H_{22}(p_r)\, e^{-\frac{\gamma}{2} p_r (t-\tau)} \sin p_r^* (t-\tau) \right\} d\tau, \tag{22}$$

где y_{0i} и W_{0i} – соответственно решение линейной системы (4) и составляющие решений от «фиктивной» нагрузки. $\Phi_2(\tau)$ – по формуле (2).

При вычислении интегралов представляется оптимальным шаговый метод по времени с уточнением (итерацией) нелинейных зависимостей на каждом этапе. Если воспользоваться представлением подынтегральной функции $V = e^{-\frac{\gamma}{2} p(t-\tau)} \sin p(t-\tau)$ и соответственно ИПФ в виде сумм слагаемых, каждое из которых – произведения функций от t и τ, алгоритм расчета подобных систем можно записать в более компактном виде.

В частности, перемещения от фиктивной нагрузки в системе с одной степенью свободы

$$m\ddot{y} + \left(1 + 2\nu \frac{d}{dt}\right) ky = q(t) + \left(1 + 2\nu \frac{d}{dt}\right) [k - c(y)]\, y = q(t) + \varphi(y), \tag{23}$$

могут вычисляться по формулам [3]:

$$W(t) = \frac{1}{mp^*} [(B_0 d_1 + D_0 d_2) F_2 - (B_0 d_2 - D_0 d_1) F_1]; \tag{24}$$

где
$$d_1 = e^{-nt} \sin p^* t\,;\; d_2 = e^{-nt} \cos p^* t\,;$$
$$F_1(t) = \int_0^t \varphi\,(y(\tau))\, e^{n\tau} \sin p^* \tau\, d\tau;$$
$$F_2(t) = \int_0^t \varphi\,(y(\tau))\, e^{n\tau} \cos p^* \tau\, d\tau; \tag{25}$$
$$B_0 = 1 - \frac{\gamma^2}{4};\; D_0 = \gamma;\; p_0^* = p_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{4}\right); n = \frac{\gamma p}{2}.$$

Алгоритмы построения решений (перемещений) системы нелинейных дифференциальных уравнений (1), записанных в виде сумм двух интегралов типа свертки (19)–(22), можно проиллюстрировать на примере уравнения (19). Воспользовавшись зависимостями (24), (25), составляющие решения по первой форме собственных колебаний системы линейных «порождающих» уравнений следует записать в виде

$$y_{01}(t)=\int_0^t [q_1(\tau)H_{11}(p_1)+q_2(\tau)H_{12}(p_1)]\,e^{-n(t-\tau)}\sin p_1^*(t-\tau)\,d\tau=\frac{1}{p_1^*}\{d_1F_2(t)-d_2F_1(t)\};\quad (г)$$

где $d_1=e^{-nt}\sin p_1^* t\,;\ d_2=e^{-nt}\cos p_1^* t\,;$ (д)

$$F_1(t)=H_{11}\int_0^t q_1(\tau)\,e^{n\tau}\sin p_1^*\tau\,d\tau+H_{12}\int_0^t q_2(\tau)\,e^{n\tau}\sin p_1^*\tau\,d\tau;$$

$$F_2(t)=H_{11}\int_0^t q_1(\tau)\,e^{n\tau}\,cos\,p_1^*\tau\,d\tau+H_{12}\int_0^t q_2(\tau)\,e^{n\tau}\cos p_1^*\tau\,d\tau;\quad (е)$$

$$B_0\approx 1;\ D_0\approx 0.$$

При вычислении перемещений по второй форме в (г) и (е) p_1^* следует заменить на p_2^* и поменять знак перед общим решением (г).

Точность построенных по формулам (24), (25) решений подобных систем оценивалась на примере уравнения (23) [8] при кубической зависимости «жесткость–перемещение» на нагрузки, возбуждаемые при работе виброактивного оборудования с вращающимися частями (насосы, вентиляторы и т. п.) при всех режимах – рабочем,
пуска

$$q(t)=Q_0\frac{(at)^2}{\omega^2}sin\frac{\omega t^2}{2},$$

и остановки (26)

$$q(t)=Q_0\frac{\omega-b(t-t_0)^2}{\omega^2}\sin\left(\omega t-\frac{b(t-t_0)^2}{2}\right),$$

где постоянные a и b определяют время пуска и остановки.

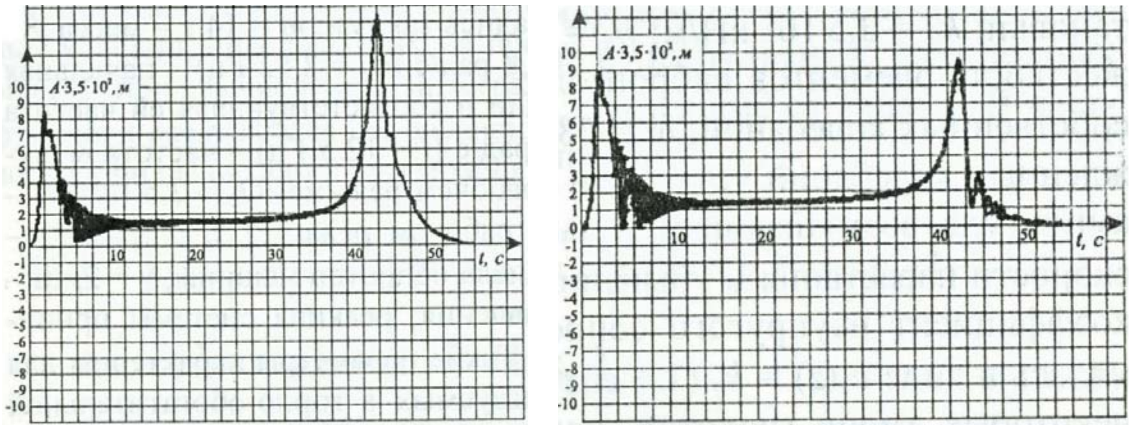
В принятом алгоритме расчета при вычислении интегралов и, следовательно, полного решения системы (1) в качестве основного параметра, определяющего, главным образом, точность решений, был принят интервал по времени $\Delta t=\frac{T_r}{N_r}$, где T_r – период колебаний, N_r – число разбиений. При $\Delta t=\frac{T}{25–35}$ погрешность решений по отношению к решениям при Δt, существенно меньше принятого, не превышала одного процента.

При достаточно малых значениях Δt возможно не уточнять величину нелинейной составляющей (не выполнять итерации), а при вычислении интегралов F_1, F_2 на каждом этапе принимать их средние значения.

Результаты

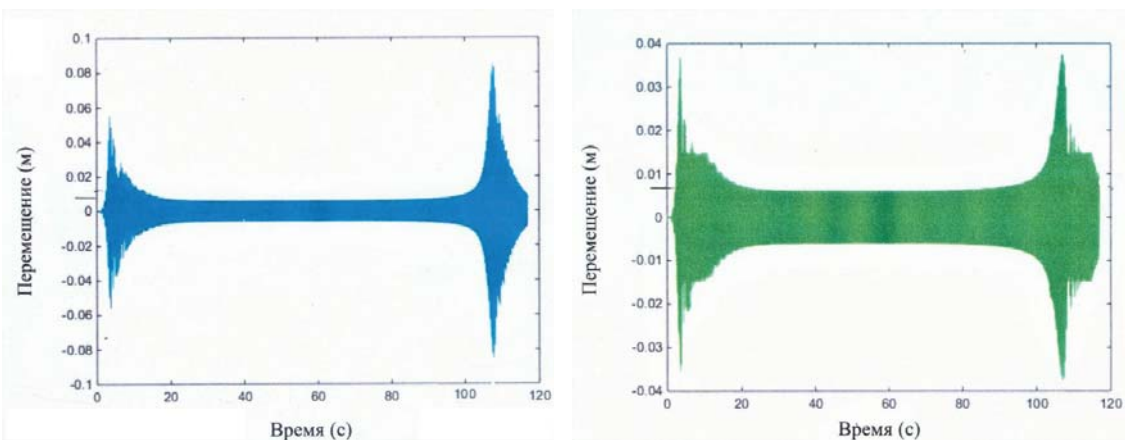
Подобный алгоритм был использован и при расчете системы с одной и двумя степенями свободы (рис. 2), дополнительная связь в которых включает демпфер вязкого трения [2]. Зависимости, построенные по результатам расчетов обеих систем, приведены на рис. 3–5.

В обоих случаях построенные решения учитывают все особенности, характерные для нелинейных систем, – срыв перемещений (при резонансе происходит переход с верхней возрастающей ветви на нижнюю – устойчивую) и связанное с этим возбуждение свободных колебаний.



а **б**

Рис. 3. Перемещения $y = A \times 10^3$(м): *а* – линейная система; *б* – система с кубической характеристикой
Fig. 3. Displacements $y = A \times 10^3$(m): *a* – linear system; *б* – cubic system



а **б**

Рис. 4. Перемещения, (м), в системе с одной степенью свободы: *а* – линейная система; *б* – с демпфером вязкого трения
Fig. 4. Displacements, (m), in a system with one degree of freedom: *a* – linear system; *b* – with a viscous damper

Выводы:

– применение методов, основанных на передаточных и переходных функциях при расчетах динамических систем в линейной постановке, позволяет построить достаточно компактные алгоритмы динамического расчета систем с конечным числом степеней свободы при произвольных, в частности периодических, воздействиях, в том числе в зонах резонанса;

– подобный подход позволяет существенно сократить этапы расчета по сравнению с традиционным методом «нормальных форм», а решения записать непосредственно относительно обобщенных, а не главных координат также в виде разложения по собственным формам;

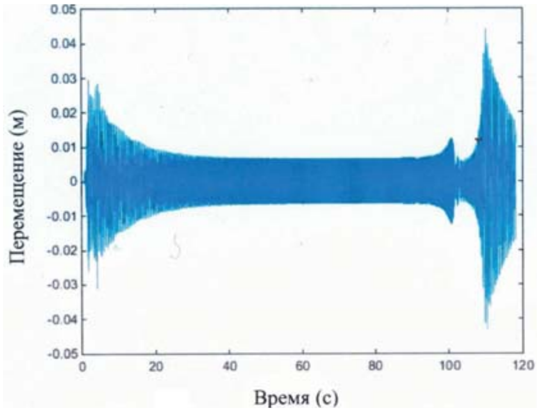


Рис. 5. Перемещения массы m_2 в системе с двумя степенями свободы

Fig. 5. Mass displacements m_2 in a system with two degrees of freedom

– позволяет упростить запись разрешающих интегральных уравнений, в том числе для нелинейных систем;

– общий метод и алгоритмы расчета проиллюстрированы в работе на примере системы с двумя степенями свободы, которая вместе с тем является основной расчетной схемой для многих систем виброзащиты (виброизоляции) с динамическими гасителями колебаний, выключающимися связями и т. п. как в линейных, так и в нелинейных системах при произвольных силовых или кинематических воздействиях;

– разрешающими уравнениями при решении задач динамического расчета нелинейных систем с конечным числом степеней свободы являются нелинейные интегральные уравнения второго рода, к которым сводятся дифференциальные уравнения;

– основными зависимостями, определяющими алгоритм расчета, являются импульсные переходные функции линейных «порождающих» уравнений, представленные в виде разложения по формам собственных колебаний непосредственно относительно обобщенных координат;

– как следует из вида интегральных уравнений, решение исходной системы заключается, по существу, в вычислении двух интегралов типа свертки – от основной и «фиктивной» нагрузок;

– определяющим при вычислении интегралов шагами по времени является интервал Δt, при значениях которого $\Delta t < \frac{T}{30}$, построенные решения (также в виде разложения по формам собственных колебаний порождающей системы) могут определяться как «практически точные», т. е. с заданной заранее погрешностью;

– сходимость и точность построенных решений оценивалась на примерах расчета двух нелинейных систем: с одной степенью свободы при кубической зависимости «перемещение – реакция» и систем с одной и двумя степенями свободы (рис. 1) с выключающейся связью с демпфером вязкого трения;

– построенные решения содержат все особенности, характерные для нелинейных систем, – срыв (скачок) перемещений при прохождении через резонанс и, что существенно, связанное с этим возбуждение свободных колебаний;

– представляется, что подобный алгоритм расчета может достаточно эффективно применяться при исследовании нелинейных систем с различными расчетными схемами, в том числе со многими степенями свободы.

Список литературы

1. *Волкова М.В., Чернов Ю.Т., Кбейли Д.* Расчет массивых фундаментов, заглубленных в грунт, под виброизолированное и невиброизолированное оборудование. Известия высших учебных заведений. Строительство. 2020;(7):5–12.
2. *Солодовников В.В.* Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. Москва: Физматгиз; 1960.
3. *Чернов Ю.Т.* Вибрации строительных конструкций. Аналитические методы расчета. Основы проектирования и нормирования вибраций строительных конструкций, подвергающихся эксплуатационным динамическим воздействиям. 2-е изд., испр. и доп. Москва: Изд-во АСВ, 2011.
4. *Чернов Ю.Т., Новожилов А.И.* Передаточные и импульсные переходные функции в задачах динамического расчета массивных фундаментов и систем виброизоляции. Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2006;(1):55–59.
5. *Розенвассер Е.Н.* Периодически нестационарные системы управления. Москва: Наука; 1973.
6. СП 26.13330.2012. Фундаменты машин с динамическими нагрузками. Актуализированная редакция СНиП 2.02.05-87. Москва: ФАУ «ФЦС»; 2012.
7. СП 413.1325800.2018. Здания и сооружения, подверженные динамическим воздействиям. Правила проектирования (с Изменением № 1). Москва: Стандартинформ; 2019.
8. *Чернов Ю.Т.* О выборе порождающих систем при исследовании нелинейных колебаний. Динамика строительных конструкций. Сб. научных трудов ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. Москва; 1985, с. 22–23.
9. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. 2-е изд. Москва: Физматгиз; 1981.
10. *Вульфсон И.И., Коловский М.З.* Нелинейные задачи динамики машин. Москва: Машиностроение; 1968.
11. *Ивович В.А., Онищенко В.Я.* Защита от вибрации в машиностроении. Москва: Машиностроение; 1990.
12. *Коловский М.З.* Нелинейная теория виброзащитных систем. Москва: Наука; 1966.
13. *Петров И.А., Осипова М.В.* О двух методах расчета нелинейных систем с одной степенью свободы. Интернет-вестник ВолгГАСУ. 2012;(3). Режим доступа: http://vestnik.vgasu.ru/attachments/PetrovOsipova-2012_3(23).pdf
14. *Чернов Ю.Т., Романенко А.Б.* К расчету нелинейных систем виброизоляции. Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2002;(4):34–38.
15. *Чернов Ю.Т., Зебилила М.* К расчету систем виброизоляции с демпферами вязкого трения. Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2018;(2):34–38.
16. *Diala U.H., Ezeh G.N.* Nonlinear demping for vibration isolation and control using semi active methods. SAVAP International. 2012;3(3):141–152.
17. *Khan W., Akhtar S., Hussain A.* Non-Linear time history analysis of tall structure for seismic load using damper. International Journal of Scientific and Research Publications. 2014;4(4):1–5.

References

1. *Volkova M.V., Chernov Yu.T., Kbeyli D.* Calculation of massive foundations buried in the ground, under vibration-insulated and non-vibration-insulated equipment. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Stroitel'stvo = News of higher educational institutions. Construction. 2020;(7):5–12. (In Russian).
2. *Solodovnikov V.V.* Statistical dynamics of linear automatic control systems. Moscow: Fizmatgiz Publ.; 1960. (In Russian).
3. *Chernov Yu.T.* Vibrations of building structures. Analytical methods of calculation. Fundamentals of design and regulation of vibrations of building structures exposed to operational dynamic impacts. 2nd ed. Moscow: ASB Publ.; 2011. (In Russian).

4. *Chernov Yu.T., Novozhilov A.I.* Transfer and impulse transient functions in problems of dynamic calculation of massive foundations and vibration isolation systems. Seismostoikoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzhenii = Earthquake engineering. Constructions safety. 2006;(1):55–59. (In Russian).
5. *Rosenwasser E.N.* Periodically unsteady control systems. Moscow: Nauka Publ.; 1973. (In Russian).
6. SP 26.13330.2012. Foundations for machines with dynamic loads. Updated version of SNiP 2.02.05-87. Moscow: Federal Center for Rationing and Standardization; 2012. (In Russian).
7. SP 413.1325800.2018. The buildings and structures under dynamic actions. Design rules (with Change No. 1). Moscow: Standartinform Publ.; 2019. (In Russian).
8. *Chernov Yu.T.* On the choice of generating systems in the study of nonlinear oscillations. In: Dynamics of building structures. Collection of scientific papers of the V.A. Koucherenko TSNIISK. Moscow; 1985, pp. 22–23. (In Russian).
9. *Bogolyubov N.N., Mitropolsky Yu.A.* Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations. 2nd ed. Moscow: Fizmatgiz Publ.; 1981. (In Russian).
10. *Wolfson I.I., Kolovsky M.Z.* Nonlinear problems of machine dynamics. Moscow: Mashinostroenie Publ.; 1968. (In Russian).
11. *Ivovich V.A., Onishchenko V.Ya.* Protection from vibration in mechanical engineering. Moscow: Mashinostroenie Publ.; 1990. (In Russian).
12. *Kolovsky M.Z.* Nonlinear theory of vibration protection systems. Moscow: Nauka Publ.; 1966. (In Russian).
13. *Petrov I.A., Osipova M.V.* On two methods for calculating nonlinear systems with one degree of freedom. Internet-Vestnik VolgGASU. 2012;(3). (In Russian). Available at: http://vestnik.vgasu.ru/attachments/PetrovOsipova-2012_3(23).pdf
14. *Chernov Yu.T., Romanenko A.B.* On the calculation of nonlinear vibration isolation systems. Seismostoikoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzhenii = Earthquake engineering. Constructions safety. 2002;(4):34–38. (In Russian).
15. *Chernov Yu.T., Zebilila M.* On the calculation of vibration isolation systems with viscous friction dampers. Seismostoikoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzhenii = Earthquake engineering. Constructions safety. 2018;(2):34–38. (In Russian).
16. *Diala U.H., Ezeh G.N.* Nonlinear damping for vibration isolation and control using semi–active methods. SAVAP International. 2012;3(3):141–152.
17. *Khan U., Akhtar S., Hussein A.* Nonlinear analysis of the time history of a high-rise structure under seismic load using a damper. International Journal of Scientific Publications. 2014;4(4):1–5.

Информация об авторе / Information about the author

Юрий Тихонович Чернов, д-р техн. наук, профессор, НИУ МГСУ, Москва
e-mail: jury.chernov@gmail.com
Yuri T. Chernov, Dr. Sci. (Engineering), Professor, National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow
e-mail: jury.chernov@gmail.com