

УДК 534.1

[https://doi.org/10.37538/2224-9494-2024-1\(40\)-7-20](https://doi.org/10.37538/2224-9494-2024-1(40)-7-20)

EDN: ASUWBY

# СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛОК ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ УЧЕТЕ СИЛ ВРАЩЕНИЯ И СИЛ ТРЕНИЯ

Л.А. БАРАГУНОВА✉

М.М. ШОГЕНОВА, канд. ф.-м. наук

О.М. ШОГЕНОВ, канд. техн. наук

Э.А. ЯФАУНОВ

*Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, ул. Чернышевского, д. 173, г. Нальчик, 360004, Российская Федерация*

## Аннотация

*Введение.* В настоящее время в строительстве широко используются балки в качестве несущих конструкций мостов, эстакад, покрытий, перекрытий, лестниц, площадок под оборудование и т.д. Для полного использования несущей способности конструкции и уменьшения расхода материала применяют балки переменного сечения по длине. При эксплуатации такие элементы конструкции подвергаются различным видам колебаний. Возникает необходимость рассмотрения вопросов колебательного движения.

*Цель* настоящей статьи состоит в применении численных методов при исследовании влияния инерционных сил вращения и при наличии сил вязкого трения на свободные колебания балок переменного сечения, которые приводят к определенным трудностям. Эта область исследования, несомненно, представляет большой интерес, так как расчеты прямо связаны с определением частот и форм собственных колебаний конструкций.

*Материалы и методы.* Свободные колебания описываются однородным дифференциальным уравнением в частных производных гиперболического типа. Используются методы разделения переменных, конечных разностей. Вводятся дискретная область в виде множества узлов равномерной сетки и однородная система алгебраических уравнений. Используется система уравнений в матрично-векторной форме.

*Результаты.* Определяются спектры собственных частот, коэффициенты затухания и собственные формы колебаний балки. Показано, что матрица коэффициентов является ленточной и пятидиагональной. Элементы матрицы являются функциями характеристического показателя. Коэффициент затухания и частота свободных колебаний определяются из системы двух нелинейных уравнений. Решение системы уравнений находится с помощью метода покоординатного спуска. Рассмотрен пример расчета балки из сварного двутавра. Вычислены пять элементов спектров коэффициентов затухания и собственных частот.

*Выводы.* Использование современных вычислительных комплексов MATLAB позволяет сочетать численные и графические способы. В решенных примерах удачно применены достоинства этих способов для определения собственных значений матриц и собственных функций, продемонстрирована надежность и высокая точность полученных результатов, позволяющая простым и универсальным способом определять характеристики свободных колебаний балок переменного сечения.

**Ключевые слова:** балки переменного сечения, свободные колебания, численные методы, спектры собственных частот, собственные формы колебаний, программная система MATLAB

**Для цитирования:** Барагунова Л.А., Шогенова М.М., Шогенов О.М., Яфаунов Э.А. Свободные колебания балок переменного сечения при учете сил вращения и сил трения. *Вестник НИЦ «Строительство»*. 2024;40(1):7–20. [https://doi.org/10.37538/2224-9494-2024-1\(40\)-7-20](https://doi.org/10.37538/2224-9494-2024-1(40)-7-20)

### **Вклад авторов**

Все авторы внесли равноценный вклад в подготовку публикации.

### **Финансирование**

Исследование не имело спонсорской поддержки.

### **Конфликт интересов**

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

*Поступила в редакцию 18.01.2024*

*Поступила после рецензирования 12.02.2024*

*Принята к публикации 14.02.2024*

## **FREE VIBRATIONS OF VARIABLE-SECTION BEAMS TAKING ROTATIONAL AND FRICTIONAL FORCES INTO ACCOUNT**

L.A. BARAGUNOVA 

M.M. SHOGENOVA, Cand. Sci. (Phys.-Math.)

O.M. SHOGENOV, Cand. Sci. (Engineering)

E.A. YAFANOV

*Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, Chernyshevskogo st., 173, Nalchik, 360004, Russian Federation*

### **Abstract**

*Introduction.* Beams are widely used in the construction industry as load-bearing structures of bridges, overpasses, coverings, slabs, stairs, equipment platforms, etc. In order to fully utilize the bearing capacity of such structures and to reduce the rate of material consumption, beams of variable cross-section along the length can be used. During operation, such structural elements are subjected to various types of vibrations, which determines the relevance of studying various aspects of vibrational motion.

*Aim.* To apply numerical methods for studying the influence of rotational inertial forces in the presence of viscous frictional forces on free vibrations of variable-section beams. This area of research presents interest, since the calculations are directly related to the determination of frequencies and forms of natural vibrations of structures.

*Materials and methods.* Free vibrations were described by a homogeneous partial differential equation of hyperbolic type. The methods of variable separation and finite differences were used. A discrete domain in the form of a set of uniform grid nodes and a homogeneous system of algebraic equations were introduced. The system of equations in the matrix-vector form was used.

*Results.* The spectra of natural frequencies, damping coefficients, and eigenforms of beam vibrations are determined. It is shown that the coefficient matrix has a banded and pentadiagonal form. The matrix elements are functions of the characteristic index. The damping coefficient and the frequency of free vibrations are determined from a system of two nonlinear equations. The solution of the system of equations is found using the method of coordinate descent. An example of calculation of a welded I-beam is considered. Five elements of the spectra of damping coefficients and natural frequencies are calculated.

*Conclusions.* State-of-the-art MATLAB solvers allows numerical and graphical methods to be combined. In the solved examples, the advantages of these methods were successfully applied to determine the eigenvalues of matrices and eigenfunctions. The high validity and accuracy of the results obtained confirm the simplicity and versatility of the methodology for determining the characteristics of free vibrations of beams of variable cross-section.

**Keywords:** free vibrations, beams of variable section, numerical methods, spectra of natural frequencies, eigenvibrations, MATLAB

**For citation:** Baragunova L.A., Shogenova M.M., Shogenov O.M., Yafaunov E.A. Free vibrations of variable-section beams taking rotational and frictional forces into account. *Vestnik NIC Stroitel'stvo = Bulletin of Science and Research Center of Construction*. 2024;40(1):7–20. (In Russian). [https://doi.org/10.37538/2224-9494-2024-1\(40\)-7-20](https://doi.org/10.37538/2224-9494-2024-1(40)-7-20)

#### Author contribution statements

All the authors have contributed equally to the publication.

#### Funding

No funding support was obtained for the research.

#### Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Received 18.01.2024

Revised 12.02.2024

Accepted 14.02.2024

## Введение

Во многих случаях изучение колебаний балок существенно усложняется по разным причинам: материал балки неоднородный, поперечное сечение переменное вдоль оси, балка несет неравномерно распределенную массу и т. д. [1–3]. В таких задачах применение аналитических методов, например при определении собственных значений, амплитудно-частотных характеристик, встречает серьезные затруднения. Выход из них состоит в использовании численных методов, область применения которых все время расширяется и охватывает новые задачи [4–6].

## Свободные колебания

Свободные колебания балки при наличии вязкого трения и с учетом инерции вращения описываются однородным дифференциальным уравнением в частных производных гиперболического типа [7–9], которое для балки переменного сечения из однородного материала примет вид\*

$$(Bu''')'' - Pu'' - rü'' + m\ddot{u} + \varepsilon m\dot{u} = 0, \quad (1)$$
$$(x, t) \in Q \equiv [ (x, t): x \in L \equiv (0, l), t > 0 ],$$

где

$$B(x) = EJ(x), \quad r(x) = \rho J(x), \quad m(x) = \rho F(x),$$

$P$  – осевая растягивающая сила;

$E, \rho$  – модуль упругости и плотность материала;

$F, J$  – площадь и осевой момент инерции поперечного сечения балки;

$\varepsilon$  – коэффициент удельного линейно-вязкого трения.

\* В данной модели колебаний деформации сдвига не учитываются.

Точки соответствуют дифференцированию по времени  $t$ , штрихи – по пространственной координате  $x$ .

В уравнении (1) в порядке следования слагаемых учтены силы упругости, осевая сила, силы инерции вращения, инерционная сила линейных перемещений, силы линейно-вязкого трения [10–12].

Зададимся дальнейшей целью определить спектры собственных частот, коэффициентов затухания и собственных форм колебаний балки. Возьмем наиболее типичный случай шарнирно опертой однопролетной балки, для которой граничные условия представляются в виде

$$u(0,t) = u''(0,t) = u(1,t) = u''(1,t). \tag{2}$$

Решение задачи (1), (2) отыскивается с помощью метода разделения переменных как произведение

$$u(x,t) = X(x)e^{\lambda t}. \tag{3}$$

Здесь характеристический показатель

$$\lambda = -\mu + j\omega, \tag{4}$$

где  $j$  – мнимая единица;

$\mu$  и  $\omega$  – подлежащие определению коэффициент затухания и частота свободных колебаний.

Подстановка (3) в (1), (2) дает

$$(BX''') - PX'' - r\lambda^2 X'' + (m\lambda^2 + \varepsilon m\lambda)X, \tag{5}$$

$$X(0) = X''(0) = X(1) = X''(1) = 0. \tag{6}$$

Введем обозначения

$$g(x) = P + r\lambda^2, \quad s(x) = m\lambda^2 + \varepsilon m\lambda$$

и перепишем уравнение (5)

$$(BX''')'' - gX'' + sX = 0. \tag{7}$$

Далее воспользуемся методом конечных разностей. С этой целью вместо области  $L + \Gamma$  ( $\Gamma$  – граничные точки) введем дискретную область  $l_h$  в виде множества узлов равномерной сетки с шагом  $h$

$$l_h \equiv [x_i; x_i = (i-1)h, \quad i = 1, 2, \dots, n, N; N = n + 1], \quad h = l/n,$$

где  $N$  – количество узлов сетки.

Значения функций и производных в уравнении (7) заменим приближенными или точными (если возможно)

$$X(x_i) \approx y_i, \quad X''(x_i) \approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}, \quad g(x_i) = g_i, \quad s(x_i) = s_i$$

и получим на первом этапе равенство

$$\frac{(BX'')_{i-1} - 2(BX'')_i + (BX'')_{i+1}}{h^2} - g_i \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + s_i y_i = 0. \quad (8)$$

Повторное применение процедуры замены второй производной конечноразностными соотношениями и приведение подобных членов дает однородную систему алгебраических уравнений

$$a_i y_{i-2} - b_i y_{i-1} + c_i y_i - d_i y_{i+1} + e_i y_{i+2} = 0, \quad i = 4, 5, \dots, n-2, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} a_i &= B_{i-1}, & b_i &= 2B_{i-1} + 2B_i + g_i h^2, & c_i &= B_{i-1} + 4B_i + B_{i+1} + 2g_i h^2 + s_i h^4, \\ d_i &= 2B_i + 2B_{i+1} + g_i h^2, & e_i &= B_{i+1}. \end{aligned}$$

Аналогичные замены проведем в граничных условиях (6), воспользуемся уравнением (9) для точек  $i = 2, 3, n-1, n$  и получим четыре уравнения

$$\begin{aligned} q_2 y_2 - d_2 y_3 + e_2 y_4 &= 0, & -b_3 y_2 + c_3 y_3 - d_3 y_4 + e_3 y_5 &= 0, \\ a_{n-1} y_{n-3} - b_{n-1} y_{n-2} + c_{n-1} y_{n-1} - d_{n-1} y_n &= 0, & a_n y_{n-2} - b_n y_{n-1} + p_n y_n &= 0. \end{aligned}$$

Здесь обозначено

$$q_2 = c_2 - a_2, \quad p_n = c_n - e_n.$$

Появляющиеся при этом значения функции во внесеточных узлах  $y_0, y_{n+2}$  выражаются через значения функции в узлах сетки. Так, например, использование граничного условия на левом конце

$$X''(0) = 0$$

при  $i = 1$  приводит к соотношению

$$\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} = 0,$$

из которого при  $y_1 = 0$  легко получается, что

$$y_0 = -y_2.$$

Аналогично граничные условия на правом конце дают

$$y_{n+2} = -y_n.$$

Исключим с помощью данных соотношений  $y_0$  и  $y_{n+2}$  из числа компонентов вектора  $y$ , а также равные нулю  $y_1$  и  $y_n$  и получим вектор  $y^T = \{y_2, y_3, \dots, y_{n-1}, y_n\}$ , компонентами которого являются отклонения балки. Тогда систему уравнений можно переписать в матрично-векторной форме

$$\mathbf{G}(\lambda) \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (10)$$



современных вычислительных компьютерных программных систем типа MATLAB при этом позволяет весьма удачно сочетать достоинства как численных, так и графических способов.

Решение системы уравнений найдем с помощью метода покоординатного спуска [16–18]. С этой целью образуем вспомогательную неотрицательную функцию

$$\Phi(\mu, \omega) = |\det(\mu, \omega)| = [f_1^2(\mu, \omega) + f_2^2(\mu, \omega)]^{1/2},$$

обращающуюся в нуль лишь в том случае, если

$$f_1(\mu, \omega) = f_2(\mu, \omega) = 0.$$

Таким образом, решение исходной системы (12) будет одновременно точкой нулевого минимума скалярной функции векторного аргумента  $\Phi(\mu, \omega)$ , так что теперь необходимо решать более простую задачу

$$\Phi(z) = 0, \quad z = \{\mu, \omega\} \in R^2 \cap (\mu > 0, \omega > 0).$$

Здесь вектор  $z$  соответствует искомым величинам,  $\Phi(z)$  представляет мультимодальную функцию, имеющую множество локальных минимумов.

Суть применяемого метода состоит в построении последовательности точек (приближений к решению)  $z_k, k = 0, 1, \dots$ , сходящейся к точке локального минимума  $z^*$ . При этом в процессе вычислений необходимо добиваться, чтобы значения вспомогательной функции были монотонно убывающими и ограниченными снизу

$$\Phi(z_0) \geq \Phi(z_1) \geq \dots \geq \Phi(z_k) \geq \dots \geq \Phi(z^*). \quad (13)$$

Для реализации такой цели вначале с помощью численных экспериментов намечается начальная точка последовательности  $z_0$ . Затем определяются последующие приближения  $z_k$  с помощью соотношений

$$z_{k+1} = z_k + \Delta_k,$$

где  $\Delta_k$  – вектор приращений координат, обеспечивающий выполнение условий (13).

Условием прекращения вычислительной процедуры, а значит, и признаком достижения корня с необходимой точностью служит выполнение неравенства

$$\Phi(z_{k+1}) < \delta, \quad (14)$$

причем  $\delta$  – априорно задаваемое малое положительное число (точность вычислений).

Многokратное повторение такой процедуры вычислений дает спектры коэффициентов затухания и собственных частот

$$\{(\mu_1, \omega_1), (\mu_2, \omega_2), \dots\}.$$

При реализации предлагаемой численной схемы наибольшая сложность состоит в правильном выборе приращений координат  $\Delta = \{\Delta\mu, \Delta\omega\}$  на каждом шаге по величине и по знаку. В этом месте обычные подходы к составлению компьютерных программ вычислений требуют высокого программистского искусства, а сами программы получаются сложными и громоздкими. Трудности существенно упрощаются, если используемая система программирования позволяет оперативно визуализировать результаты вычислений. Поясним сказанное на примере данной задачи при пользовании программной системой MATLAB.

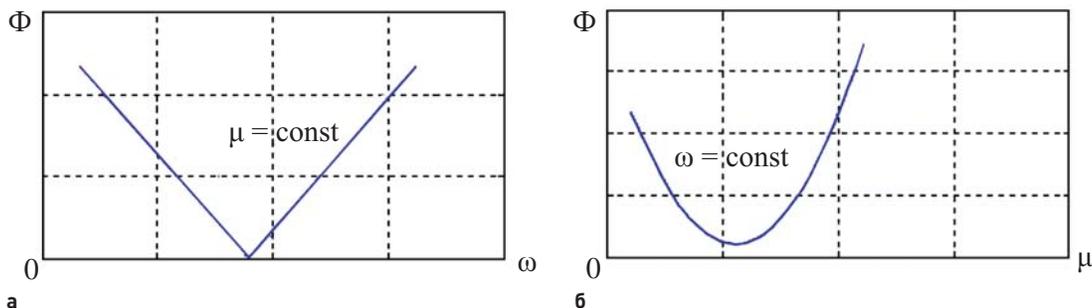


Рис. 1. Графики, полученные программной системой MATLAB  
 Fig. 1. Graphs obtained by the MATLAB toolbox

Один из аргументов функции  $\Phi(\mu, \omega)$ , например  $\mu$ , фиксируется, вычисляются ординаты функции  $\Phi(\omega | \mu)$ , на экран компьютера выводится ее график (рис. 1а), вычисления приостанавливаются. По кривой, являющейся сечением поверхности  $\Phi(\mu, \omega)$ , отчетливо видны условные минимумы функции  $\Phi(\omega | \mu)$ . Теперь фиксируем аргумент  $\omega$  на значении, соответствующем условному минимуму и строим новый график  $\Phi(\mu | \omega)$  (рис. 1б) и т. д. Такая процедура продолжается до выполнения условия (14).

Пример 1. В качестве тестовой проверки рассмотрим балку постоянного сечения из двутавра № 14 с численными данными

$$l = 4 \text{ м}, n = 400, \rho = 7800 \text{ кг/м}^3, E = 200 \text{ ГПа}, F = 17,4 \text{ см}^2, J = 572 \text{ см}^4, \varepsilon = 0,01 \text{ с}^{-1}, P = 0.$$

По процедуре, описанной выше, определены пять элементов спектра собственных частот. Их значения представлены в табл. 1.

Таблица 1

**Элементы спектра собственных частот**

Table 1

**Elements of the spectrum of eigenfrequencies**

$k$	1	2	3	7	10
$\mu_k, \text{с}^{-1}$	0,00499	0,00496	0,00491	0,00455	0,00416
$\omega_k, \text{с}^{-1}$	178,91	713,46	1597,23	8367,43	16321,99

В табл. 2 показаны значения пяти элементов спектра собственных частот для балки с такими же численными данными при  $P = -0,25P_3$  ( $P_3$  – критическая эйлерова сила).

Таблица 2

**Элементы спектра собственных частот при  $P = -0,25P_3$**

Table 2

**Elements of the spectrum of eigenfrequencies at  $P = -0,25P_3$**

$k$	1	2	3	7	10
$\mu_k, \text{с}^{-1}$	0,00499	0,00496	0,00491	0,00455	0,00416
$\omega_k, \text{с}^{-1}$	154,94	690,80	1574,88	8346,05	16301,57

Примечательно, что для получения результатов требуется небольшое количество шагов в методе покоординатного спуска (4–5 для каждого  $k$ ).

Тот же спектр (при  $P = 0$ ), полученный точными аналитическими методами, приведен в табл. 3.

Ниже в табл. 4 показана разница между собственными частотами колебаний балки, полученными точными аналитическими методами и методом конечных разностей.

Таблица 3

**Элементы спектра собственных частот при  $P = 0$**

Table 3

**Elements of the spectrum of eigenfrequencies at  $P = 0$**

$k$	1	2	3	7	10
$\mu_k, c^{-1}$	0,00499	0,00496	0,00491	0,00455	0,00416
$\omega_k, c^{-1}$	178,91	713,47	1597,3	8369,44	16329,7

Таблица 4

**Разница между собственными частотами колебаний балки**

Table 4

**Difference between eigenfrequencies of beam vibrations**

$k$	1	2	3	7	10
Разница, %	0	0,001	0,004	0,024	0,047

Видно, что разница небольшая, не имеющая практической значимости.

Результаты данного примера убедительно показывают, что метод конечных разностей дает надежные результаты, позволяющие универсальным и простым способом определять динамические характеристики свободных колебаний балок переменного сечения [19–20].

Спектр собственных форм может быть установлен с помощью системы уравнений (10). Ввиду того, что определитель матрицы  $G$  равен нулю, собственные формы могут быть найдены лишь с точностью до сомножителя. Тогда в (10) можно принять, например, что  $y_2 = 1$ , и остальные неизвестные найти из системы уравнений, из которой исключена последняя строка (см. на стр. 16).

Заметим, что правая часть системы уравнений образована из элементов первого столбца матрицы  $G$ .

*Пример 2.* По данным примера 1 вычислим ординаты трех первых собственных форм  $\varphi_k(x) = y_k(x)$ .

Результаты счета в виде графиков показаны на рис. 2. Номера кривых при этом совпадают с номерами собственных частот; проведена нормировка форм, удовлетворяющая условию

$$\max_i |y_i| = 1.$$

Данные кривые почти неразличимо совпадают с собственными формами, найденными с помощью точных аналитических методов.



Таблица 5

**Элементы спектров коэффициентов затухания и собственных частот**

Table 5

**Elements of spectra of damping coefficients and eigenfrequencies**

<i>k</i>	1	2	3	4	5
$\mu_k, c^{-1}$	0,00494	0,00474	0,00440	0,00396	0,00354
$\omega_k, c^{-1}$	526,02	1913,70	4209,43	7332,23	10761,67

Таблица 6

**Элементы спектров коэффициентов затухания и собственных частот  
для классической модели**

Table 6

**Elements of spectra of damping coefficients and eigenfrequencies for a classical model**

<i>k</i>	1	2	3	4	5
$\mu_k, c^{-1}$	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005
$\omega_k, c^{-1}$	530,69	1971,84	4494,04	8247,98	12782,02

Таблица 7

**Разница между собственными частотами балки по двум моделям**

Table 7

**Difference between eigenfrequencies of the beam according to two models**

<i>k</i>	1	2	3	7	10
Разница, %	0,88	2,95	6,33	11,10	15,81

## Заключение

1. Метод конечных разностей дает надежные результаты, позволяющие универсальным и простым способом определять динамические характеристики свободных колебаний балок переменного сечения.

2. Задача о колебаниях балки переменного сечения, представленная в статье, решена эффективно с помощью численного метода конечных разностей.

3. Основное обыкновенное дифференциальное уравнение колебаний балки и уравнения граничных условий решаются легко, с помощью численного метода конечных разностей.

4. Решение основных аналитических уравнений приводит к однородной алгебраической системе уравнений в матрично-векторной форме, что существенно облегчает достижение конечных целей.

## Список литературы

1. Ильин В.П., Карпов В.В., Масленников А.М. Численные методы решения задач строительной механики. Москва: Изд-во АСВ, СПб.: СПбГАСУ; 2005.
2. Караманский Т.Д. Численные методы строительной механики. Москва: Стройиздат; 1981.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. Москва: Наука; 1989.
4. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. Изд. 2-е. Москва: Физматлит; 2006.
5. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. Москва: Высшая школа; 1979.
6. Масленников А.М. Динамика и устойчивость сооружений. Москва: Юрайт; 2016.
7. Kulterbayev Kh.P., Shogenova M.M., Baragunova L.A. On the Influence of the Characteristic Frequency and Broadband of Seismic Effects on the Vertical Rod Oscillations. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020;753(4):042040. <https://doi.org/10.1088/1757-899x/753/4/042040>
8. Барагунов Т.М. Об устойчивости многопролетных стержней на гибких опорах. В: Восьмые Окуневские чтения: материалы докладов международной конференции, 25–28 июня 2013 г., г. Санкт-Петербург, Россия. СПб.: Балтийский гос. технический ун-т; 2013, с. 72–74.
9. Культербаев Х.П., Барагунова Л.А. О реализации проблемы собственных значений сжато-растянутого стержня на компьютере. В: Компьютерные технологии в строительстве: материалы Всероссийской научно-технической конференции. Махачкала: Алеф (ИП Овчинников); 2013, с. 90–94.
10. Культербаев Х.П., Барагунова Л.А. О плотности собственных значений в задаче об устойчивости многопролетного стержня. В: Строительство: Проблемы и перспективы. Сборник статей по материалам международной научно-практической конференции. Махачкала: Дагестанский государственный институт народного хозяйства; 2013, с. 133–135.
11. Культербаев Х.П., Чеченов Т.Ю., Барагунов Т.М. Вынужденные колебания континуально-дискретной многопролетной балки при учете инерционных сил вращения. Вестник ВолгГАСУ. Серия: Строительство и архитектура. 2012;26:48–55.
12. Чеченов Т.Ю. Кинематически возбуждаемые колебания модифицированной балки Тимошенко. В: Надежность и долговечность строительных материалов, конструкций и оснований фундаментов. Материалы IV Международной научно-технической конференции (12–14 мая 2005 г.). Ч. II. Волгоград; 2005, с. 36–41.
13. Kulterbayev Kh.P., Baragunova L.A., Lafisheva M.M. Determining Frequencies of Free Longitudinal Vibrations of Rods by Analytical and Numerical Methods. In: Alikhanov A., Lyakhov P., Samoilenko I. Current Problems in Applied Mathematics and Computer Science and Systems. APAMCS 2022. Lecture Notes in Networks and Systems, vol. 702. Springer Nature Switzerland; 2023, pp. 131–136. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-34127-4\\_13](https://doi.org/10.1007/978-3-031-34127-4_13)
14. Культербаев Х.П., Барагунова Л.А. Определение собственных значений и собственных функций в задаче о колебаниях балки переменного сечения. В: Строительство и архитектура: теория и практика сейсмической безопасности. Сборник научных статей по итогам деятельности международной научно-практической конференции, посвященной памяти д.т.н., профессора Абакарова А.Д. (14–16 марта 2023 г., г. Махачкала). Махачкала; 2023, с. 131–142.
15. Культербаев Х.П., Лафишева М.М., Цеева Ф.М. Вынужденные гармонические и случайные продольные колебания вертикального стержня. В: Строительство и архитектура: теория и практика сейсмической безопасности. Сборник научных статей по итогам деятельности международной научно-практической конференции, посвященной памяти д.т.н., профессора Абакарова А.Д. (14–16 марта 2023 г., г. Махачкала). Махачкала; 2023, с. 170–177.
16. Казиев А.М., Казиев И.А. Колебания балки с сосредоточенными массами на упругих опорах. В: Наука, техника и технология XXI века (НТТ-2013). Материалы V Международной научно-технической конференции (Нальчик, 2013 г.). Нальчик: Кабардино-Балкарский государственный университет; 2013.
17. Казиев А.М. Свободные колебания растянутой балки с сосредоточенными массами. В: Перспектива-2004. Материалы Всероссийской научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Т. III. Нальчик; 2004. с. 251–255.
18. Культербаев Х.П., Джанкулаев А.Я. Введение в MATLAB. Нальчик: КБГУ; 2006.
19. Барагунова Л.А., Кертбиев А.А. Расчет балок методом конечных разностей. В: Фундаментальные и прикладные научные исследования: актуальные вопросы современной науки, достижения и инновации. Сборник научных статей по материалам IX Международной научно-практической конференции (8 ноября 2022 г., г. Уфа). Уфа: Изд. НИЦ Вестник науки; 2022, с. 378–385.
20. Kulterbaev Kh.P., Vodakhova L.A., Baragunova L.A., Shogenova M.M., Tsipinova A.Kh. Free oscillations of a beam with installation (1st part). IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2021;1083(1):012043. <https://doi.org/10.1088/1757-899x/1083/1/012043>

## References

1. *Ilyin V.P., Karpov V.V., Maslennikov A.M.* Numerical methods for solving problems of structural mechanics. Moscow: ASB Publ., St. Petersburg: St. Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering; 2005. (In Russian).
2. *Karamansky T.D.* Numerical methods of structural mechanics. Moscow: Stroizdat Publ.; 1981. (In Russian).
3. *Samarskii A.A., Gulin A.V.* Numerical methods. Moscow: Nauka Publ.; 1989. (In Russian).
4. *Formalev V.F., Revisnikov. D.L.* Numerical methods. 2nd ed. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2006. (In Russian).
5. *Biderman V.L.* Applied theory of mechanical vibrations. Moscow: Vysshaya shkola Publ.; 1979. (In Russian).
6. *Maslennikov A.M.* Dynamics and stability of structures. Moscow: Yurait Publ.; 2016. (In Russian).
7. *Kulterbayev Kh.P., Shogenova M.M., Baragunova L.A.* On the Influence of the Characteristic Frequency and Broadband of Seismic Effects on the Vertical Rod Oscillations. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020;753(4):042040. <https://doi.org/10.1088/1757-899x/753/4/042040>
8. *Baragunov T.M.* On the stability of multi-span rods on flexible supports. In: The eighth Okunev readings: proceedings of the reports of the international conference, June 25–28, 2013, St. Petersburg, Russia. St. Petersburg: Baltic State Technical University; 2013, pp. 72–74. (In Russian).
9. *Kulterbaev H.P., Baragunova L.A.* On the implementation of the problem of eigenvalues of a compressed-stretched rod on a computer. In: Computer technologies in construction: Materials of the All-Russian Scientific and Technical Conference. Makhachkala: Alef (IP Ovchinnikov); 2013, pp. 90–94. (In Russian).
10. *Kulterbaev H.P., Baragunova L.A.* On the density of eigenvalues in the stability problem of a multi-span rod. In: Construction: Problems and prospects. Collection of articles based on the materials of the international scientific and practical conference. Makhachkala: Dagestan State Institute of National Economy; 2013, pp. 133–135. (In Russian).
11. *Kulterbaev H.P., Chechenov T.Yu., Baragunov T.M.* Forced oscillations of a continually discrete multi-span beam taking into account inertial forces of rotation. Bulletin of the Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering. Series "Construction and Architecture". 2012;26:48–55. (In Russian).
12. *Chechenov T.Yu.* Kinetically excited oscillations of a modified Timoshenko beam. In: Reliability and durability of building materials, structures and foundations. Proceedings of the IV International Scientific and Technical Conference (May 12–14, 2005). Part II. Volgograd; 2005, pp. 36–41. (In Russian).
13. *Kulterbayev Kh.P., Baragunova L.A., Lafisheva M.M.* Determining Frequencies of Free Longitudinal Vibrations of Rods by Analytical and Numerical Methods. In: *Alikhanov A., Lyakhov P., Samoylenko I.* Current Problems in Applied Mathematics and Computer Science and Systems. APAMCS 2022. Lecture Notes in Networks and Systems, vol. 702. Springer Nature Switzerland; 2023, pp. 131–136. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-34127-4\\_13](https://doi.org/10.1007/978-3-031-34127-4_13)
14. *Kulterbaev H.P., Baragunova L.A.* Determination of eigenvalues and eigenfunctions in the problem of vibrations of a beam of variable cross-section. In: Construction and architecture: theory and practice of seismic safety. Collection of scientific articles based on the results of the international scientific and practical conference dedicated to the memory of Doctor of Technical Sciences, Professor *Abakarov A.D.* (March 14–16, 2023, Makhachkala). Makhachkala; 2023, pp. 131–142. (In Russian).
15. *Kulterbaev H.P., Lafisheva M.M., Tseeva F.M.* Forced harmonic and random longitudinal vibrations of a vertical rod. In: Construction and architecture: theory and practice of seismic safety. Collection of scientific articles based on the results of the international scientific and practical conference dedicated to the memory of Doctor of Technical Sciences, Professor *Abakarov A.D.* (March 14–16, 2023, Makhachkala). Makhachkala; 2023, pp. 170–177. (In Russian).
16. *Kaziev A.M., Kaziev I.A.* Vibrations of a beam with concentrated masses on elastic supports of furnaces. In: Science, technology and technology of the XXI century (NTT-2013). Proceedings of the V International Scientific and Technical Conference (Nalchik, 2013). Nalchik: Kabardino-Balkarian State University; 2013. (In Russian).
17. *Kaziev A.M.* Free vibrations of a stretched beam with concentrated masses. In: Perspektiva-2004. Materials of the All-Russian Scientific Conference of students, postgraduates and young scientists. Vol. III. Nalchik; 2004, pp. 251–255. (In Russian).
18. *Kulterbaev H.P., Dzhanukulaev A.Ya.* Introduction to MATLAB. Nalchik: Kabardino-Balkarian State University; 2006. (In Russian).
19. *Baragunova L.A., Kertbiev A.A.* Calculation of beams by the finite difference method. In: Fundamental and applied scientific research: current issues of modern science, achievements and innovations. Collection of scientific articles based on the materials of the IX International Scientific and Practical Conference (November 8, 2022, Ufa). Ufa: Publishing house "NITs Vestnik Nauki"; 2022, pp. 378–385. (In Russian).

**20.** *Kulterbaev Kh.P., Vodakhova L.A., Baragunova L.A., Shogenova M.M., Tsipinova A.Kh.* Free oscillations of a beam with installation (1st part). IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2021;1083(1):012043. <https://doi.org/10.1088/1757-899x/1083/1/012043>

## Информация об авторах / Information about the authors

**Лялюс Адальбиевна Барагунова** , старший преподаватель кафедры строительных конструкций и механики Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова, Нальчик  
e-mail: baragunoval@mail.ru  
тел.: +7 (928) 075-62-99

**Lyalusya A. Baragunova** , Senior Lecturer, Department of Engineering Structures and Mechanics, Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, Nalchik  
e-mail: baragunoval@mail.ru  
tel.: +7 (928) 075-62-99

**Марьяна Мухарбиевна Шогенова**, канд. ф.-м. наук, доцент, доцент кафедры строительных конструкций и механики Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова, Нальчик  
e-mail: shogenova\_mar@mail.ru  
тел.: +7 (928) 710-50-45

**Maryana M. Shogenova**, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Engineering Structures and Mechanics, Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, Nalchik  
e-mail: shogenova\_mar@mail.ru  
tel.: +7 (928) 710-50-45

**Олег Мухамедович Шогенов**, канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры строительных конструкций и механики Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова, Нальчик  
e-mail: shogenova\_mar@mail.ru  
тел.: +7 (928) 705-59-16

**Oleg M. Shogenov**, Cand. Sci. (Engineering), Associate Professor, Department of Engineering Structures and Mechanics, Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, Nalchik  
e-mail: shogenova\_mar@mail.ru  
tel.: +7 (928) 705-59-16

**Эльдар Асланович Яфаунов**, студент направления подготовки «Строительство» Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова, Нальчик  
e-mail: shogenova\_mar@mail.ru  
тел.: +7 (938) 078-06-20

**Eldar A. Yafaunov**, Student, "Construction" educational program, Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, Nalchik  
e-mail: yafaunov@yandex.ru  
tel.: +7 (938) 078-06-20

 Автор, ответственный за переписку / Corresponding author