

УДК 624.04

[https://doi.org/10.37538/2224-9494-2024-1\(40\)-35-48](https://doi.org/10.37538/2224-9494-2024-1(40)-35-48)

EDN: CYHKDR

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Д.Н. НИЗОМОВ<sup>1</sup>, д-р техн. наук  
А.М. САНГИНОВ<sup>1,✉</sup>, канд. техн. наук  
М.М. САЛОМЗОДА<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии Национальной академии наук Таджикистана, ул. Айни, д. 267, г. Душанбе, 734063, Республика Таджикистан

<sup>2</sup> ГУП «Научно-исследовательский институт «Строительство и архитектура» Комитета по архитектуре и строительства при Правительстве РТ, ул. Хусейнзаде, д. 36а, г. Душанбе, 734025, Республика Таджикистан

## Аннотация

*Введение.* В статье излагаются вопросы математического моделирования динамической задачи в виде обобщенной системы с одной степенью свободы. К таким системам относятся высотные сооружения башенного типа. Обеспечение сейсмостойкости уникальных объектов башенного типа является актуальной проблемой.

*Целью работы* является определения напряженно-деформированного состояния исследуемого объекта от внешнего воздействия в виде заданной акселерограммы землетрясения.

*Материалы и методы.* Используются методы строительной механики, динамики сооружений, а также методы численного моделирования. На основе уравнения Лагранжа получено уравнение движения обобщенной системы с распределенными параметрами. Методика исследований включала построение математических моделей рассматриваемых систем, их численный анализ, сопоставление полученных результатов с имеющимися данными.

*Результаты.* Разработана математическая модель, позволяющая проводить исследования напряженно-деформированного состояния сооружения при различных внешних воздействиях, в том числе сейсмических. Дифференциальное уравнение обобщенной системы решается непосредственно с использованием метода последовательных аппроксимаций и с использованием интеграла Дюамеля на каждом шаге по времени. На основе разработанного алгоритма составлена компьютерная программа на языке FORTRAN и получены кинематические и статические данные исследуемого объекта. На примере сооружения башенного типа исследованы свободные колебания от действия мгновенного импульса и получены результаты от заданной акселерограммы землетрясения.

*Выводы.* Из полученных результатов следует, что период свободных колебаний объекта совпадает с результатами численного моделирования. Результаты, полученные численным дифференцированием, практически совпадают с результатами численного интегрирования при различных воздействиях. Достоверность результатов подтверждается сравнением результатов, полученных двумя методами. Разработанные компьютерные программы могут быть использованы для проведения мониторинга уникальных объектов башенного типа.

**Ключевые слова:** математическая модель, обобщенная система, сейсмическое воздействие, потенциальная энергия, уравнение Лагранжа, кинетическая энергия

**Для цитирования:** Низомов Д.Н., Сангинов А.М., Саломзода М.М. Численное моделирование динамической задачи обобщенной системы с распределенными параметрами. *Вестник НИЦ «Строительство»*. 2024;40(1):35–48. [https://doi.org/10.37538/2224-9494-2024-1\(40\)-35-48](https://doi.org/10.37538/2224-9494-2024-1(40)-35-48)

#### **Вклад авторов**

Низомов Д.Н. – постановка задачи исследования, разработка математической модели, разработка компьютерной программы, проведение численных экспериментов и подтверждение достоверности результатов, написание текста статьи.

Сангинов А.М. – анализ результатов исследований в области зданий и сооружений башенного типа переменного сечения по высоте и подготовка данных, работа над систематизацией материала, написание текста статьи.

Саломзода М.М. – анализ результатов исследований в области зданий и сооружений башенного типа переменного сечения по высоте и подготовка данных, работа над систематизацией материала.

#### **Финансирование**

Исследование не имело спонсорской поддержки.

#### **Конфликт интересов**

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов

*Поступила в редакцию 30.10.2023*

*Поступила после рецензирования 04.12.2023*

*Принята к публикации 07.12.2023*

## **NUMERICAL SIMULATION OF THE DYNAMIC PROBLEM OF A GENERALIZED SYSTEM WITH DISTRIBUTED PARAMETERS**

D.N. NIZOMOV<sup>1</sup>, Dr. Sci. (Engineering)

A.M. SANGINOV<sup>1,✉</sup>, Cand. Sci. (Engineering)

M.M. SALOMZODA<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institute of Geology, Earthquake-Resistant Construction and Seismology of the National Academy of Sciences of Tajikistan (NAST), Aini str., 267, Dushanbe, 734063, the Republic of Tajikistan

<sup>2</sup> State Unitary Enterprise “Research Institute “Construction and Architecture” of the Committee on Architecture and Construction under the Government of the Republic of Tajikistan, st. Huseynzade, 36a, Dushanbe, 734025, Republic of Tajikistan

#### **Abstract**

*Introduction.* Questions of mathematical modeling of the dynamic problem in the form of a generalized system with one degree of freedom are discussed. Such systems include high-rise tower-type structures. Seismic stability of unique tower-type objects represents a relevant research problem.

*Aim.* To determine the stress-strain state of a studied object under the action of external factors in the form of an earthquake accelerogram.

*Materials and methods.* The methods of structural mechanics, dynamics of structures, and numerical simulation were used. The Lagrange equation was used as a basis for obtaining the motion equation of a generalized system with distributed parameters. The research methodology also included mathematical modeling of the considered systems, their numerical analysis, comparison of the obtained results with literature data.

*Results.* A mathematical model was developed to investigate the stress-strain state of engineering structures under various external, including seismic, effects. The differential equation of the generalized system is solved directly using the method of successive approximations and the Duhamel integral at each time step.

The developed algorithm was used to compile a software application in the FORTRAN language followed by obtaining the kinematic and static data of the investigated object. Using the example of a tower-type structure, free vibrations from the action of an instantaneous impulse were investigated. The results from a given earthquake accelerogram are presented.

*Conclusions.* The results obtained on the free vibrations of the object under study agree well with those obtained by numerical simulation. The results obtained by numerical differentiation are effectively identical with those obtained by numerical integration, under the action of various effects. The validity of the results is confirmed by comparing the results obtained by the two methods. The developed software applications can be used for monitoring the state of unique tower-type objects.

**Keywords:** mathematical simulation, generalized system, seismic impact, potential energy, Lagrange equation, kinetic energy

**For citation:** Nizomov D.N., Sanginov A.M., Salomzoda M.M. Numerical simulation of the dynamic problem of a generalized system with distributed parameters. *Vestnik NIC Stroitel'stvo = Bulletin of Science and Research Center of Construction*. 2024;40(1):35–48. [In Russian]. [https://doi.org/10.37538/2224-9494-2024-1\(40\)-35-48](https://doi.org/10.37538/2224-9494-2024-1(40)-35-48)

#### Author contribution statements

Nizomov D.N. – formulation of a research problem, development of a mathematical model, development of a software application, conducting numerical experiments and their validation, article writing.

Sanginov A.M. – analysis of the research data on the tower-type engineering structures of variable cross-section in height, data interpretation and generalization, article writing.

Salomzoda M.M. – analysis of the research data on the tower-type engineering structures of variable cross-section in height, data interpretation and generalization.

#### Funding

No funding support was obtained for the research.

#### Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Received 30.10.2023

Revised 04.12.2023

Accepted 07.12.2023

Рассмотрим динамическую модель сооружения, которая представляет собой систему с распределенной массой  $m(x)$  и сосредоточенными массами  $m_j$ , установленными в некоторых точках (рис. 1). Данное сооружение башенного типа, в котором основными характеристиками являются изгибная жесткость  $EI(x)$  и погонная масса  $m(x)$ , представляет систему с бесконечным числом степеней свободы. Если предположить, что перемещения сооружения ограничены только одной формой колебаний, то такая модель с обобщенной координатой  $w(t)$  может быть использована для расчета на сейсмические воздействия в виде заданной акселерограммы землетрясения. Таким образом, предполагается, что движение сооружения, как обобщенная система с одной степенью свободы, происходит только по одной форме в виде безразмерной функции  $\varphi(x)$  с амплитудой колебаний  $w(t)$ . Следовательно, при такой форме движения перемещение и соответствующие производные по времени выражаются так:

$$\begin{aligned} W(x,t) &= w(t)\varphi(x), \\ \dot{W}(x,t) &= \dot{w}(t)\varphi(x), \\ \ddot{W}(x,t) &= \ddot{w}(t)\varphi(x). \end{aligned} \tag{1}$$

При заданном перемещении основания в виде функции  $w_0(t)$ , общие перемещение, скорость и квадрат скорости записываются таким образом:

$$\begin{aligned} W_1(x,t) &= W(x,t) + w_0(t) = w(t)\varphi(x) + w_0(t), \\ \dot{W}_1(x,t) &= \dot{w}(t)\varphi(x) + \dot{w}_0(t), \\ \dot{W}_1^2(x,t) &= \dot{w}^2(t)\varphi^2(x) + 2\dot{w}(t)\varphi(x)\dot{w}_0(t) + \dot{w}_0^2(t). \end{aligned} \tag{2}$$

Для определения потенциальной энергии исследуемого объекта, который испытывает изгиб и продольное сжатие, необходимо иметь вторую производную от функции  $W(x,t)$  по  $x$ :

$$W''(x,t) = w(t) \times \varphi''(x),$$

а также вертикальную составляющую верхней точки сооружения (рис. 1):

$$\Delta = \int_0^l d\Delta.$$

С учетом малости перемещения  $d\Delta$  [1] можно написать:

$$\begin{aligned} d\Delta &= dx(1 - \cos \alpha) = dx \times 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \approx 2dx \frac{\alpha^2}{4} \approx dx \frac{tg^2 \alpha}{2} = dx \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2, \\ \Delta &= \int_0^l d\Delta = \frac{1}{2} \int_0^l (W'')^2 dx = w^2(t) \frac{1}{2} \int_0^l [\varphi'(x)]^2 dx. \end{aligned} \tag{2a}$$

**Уравнение движения.** Для вывода уравнений движения обобщенной системы воспользуемся уравнением Лагранжа второго рода, соответствующего вариационному принципу Гамильтона [2–4]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{w}} \right) - \frac{\partial T}{\partial w} + \frac{\partial U}{\partial w} = Q_p + Q_d, \tag{3}$$

где  $T$  – кинетическая энергия;

$U$  – потенциальная энергия деформации изгиба;

$Q_p$  – обобщенная сила (сила трения или внешняя возмущающая сила, зависящая от времени);

$Q_d$  – обобщенная сила сопротивления.

Кинетическая и потенциальная энергии модели, представленной на рис. 1, с учетом (1), (2) и (2a) записываются в виде:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^l m(x) \dot{W}_1^2(x,t) dx + \frac{1}{2} \sum_j m_j \dot{W}_1^2(x,t) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l m(x) \dot{w}^2(t) \varphi^2(x) dx + \int_0^l m(x) \dot{w}(t) \varphi(x) \dot{w}_0(t) dx + \frac{1}{2} \int_0^l m(x) [\dot{w}_0(t)]^2 dx + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_j m_j \left[ \dot{w}^2(t) \varphi_j^2 + 2\dot{w}(t) \varphi_j \dot{w}_0(t) + \dot{w}_0^2(t) \right], \end{aligned}$$

$$U_M = \frac{1}{2} \int_0^l M(x,t) W'' dx = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) (W'')^2 dx = \frac{w^2(t)}{2} \int_0^l EI(x) [\varphi''(x)]^2 dx, \tag{4}$$

$$U_N = -\frac{1}{2} \int_0^l N(x) d\Delta = -\frac{w^2(t)}{2} \int_0^l N(x) [\varphi'(x)]^2 dx,$$

где  $N(x)$  – нормальная сила от собственного веса сооружения, которая может изменяться по линейному закону.

Суммарная потенциальная энергия от изгибающего момента и сжимающей силы будет равняться

$$U = U_M + U_N = w^2(t) \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) [\varphi''(x)]^2 dx - w^2(t) \frac{1}{2} \int_0^l N(x) [\varphi'(x)]^2 dx. \tag{5}$$

Здесь предполагается, что опорная часть сооружения во время землетрясения приобретает только горизонтальное перемещение.

Производные от кинетической и потенциальной энергии с учетом (4) и (5) приобретают вид

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{w}} = \dot{w}(t) \int_0^l m(x) \varphi^2(x) dx + \dot{w}_0(t) \int_0^l m(x) \varphi(x) dx + \Sigma m_j [\dot{w}(t) \varphi_j^2 + \varphi_j \dot{w}_0(t)],$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{w}} \right) = \ddot{w}(t) \int_0^l m(x) \varphi^2(x) dx + \ddot{w}_0(t) \int_0^l m(x) \varphi(x) dx + \ddot{w}(t) \Sigma m_j \varphi_j^2 + \ddot{w}_0(t) \Sigma m_j \varphi_j, \tag{6}$$

$$\frac{\partial T}{\partial w} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial U}{\partial w} = w(t) \int_0^l EI(x) [\varphi''(x)]^2 dx - w(t) \int_0^l N(x) [\varphi'(x)]^2 dx. \tag{8}$$

Обобщенная сила сопротивления определяется по формуле

$$Q_d = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{w}},$$

где  $\Phi$  – диссипативная функция Рэля [5, 6], которая для системы с распределенными параметрами затухания представляется в виде

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_0^l c(x) [\dot{W}(x,t)]^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l c(x) [\dot{w}(t)]^2 [\varphi(x)]^2 dx,$$

$$Q_d = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{w}} = -\dot{w}(t) \int_0^l c(x) [\varphi(x)]^2 dx, \tag{9}$$

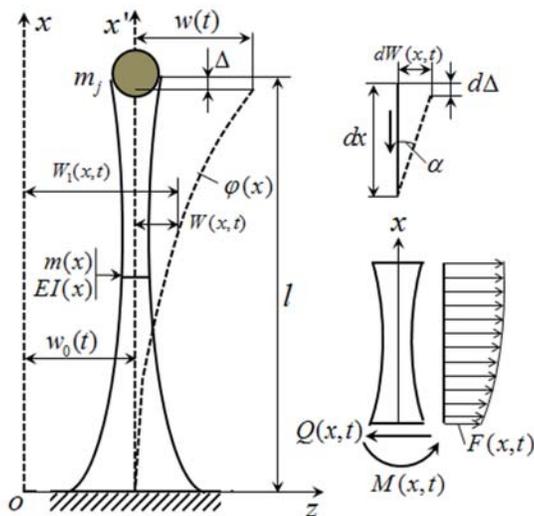


Рис. 1. Обобщенная система с распределенной массой  
 Fig. 1. Generalized system with distributed mass

Внося (6)–(9) в (3), получаем уравнение

$$\ddot{w}(t) \left[ \int_0^l m(x) \varphi^2(x) dx + \sum m_j \varphi_j^2 \right] + w(t) \int_0^l EI(x) [\varphi''(x)]^2 dx - w(t) \int_0^l N(x) [\varphi'(x)]^2 dx = -\dot{w}(t) \int_0^l c(x) [\varphi(x)]^2 dx - \ddot{w}_0(t) \left[ \int_0^l m(x) \varphi(x) dx + \sum m_j \varphi_j \right],$$

которое представляется в виде

$$m^* \ddot{w}(t) + c^* \dot{w}(t) + k^* w(t) = -\bar{m} \ddot{w}_0(t), \tag{10}$$

$$m^* = \int_0^l m(x) \varphi^2(x) dx + \sum m_j \varphi_j^2, \tag{10а}$$

$$k^* = \int_0^l EI(x) [\varphi''(x)]^2 dx - \int_0^l N(x) [\varphi'(x)]^2 dx, \tag{10б}$$

$$c^* = \int_0^l c(x) [\varphi(x)]^2 dx, \quad \bar{m} = \int_0^l m(x) \varphi(x) dx + \sum m_j \varphi_j, \tag{10в}$$

где  $m^*$ ,  $k^*$ ,  $c^*$  – обобщенные масса, жесткость и затухания;

$\bar{m}$  – коэффициент сейсмического возмущения, который характеризует уровень возможных колебаний сооружения по форме  $\varphi(x)$  [7].

Поделив обе части (10) на обобщенную массу  $m^*$ , получим

$$\ddot{w}(t) + 2\xi\omega\dot{w}(t) + \omega^2 w(t) = -\mu \ddot{w}_0(t),$$

$$\mu = \bar{m}/m^*, \quad 2\xi\omega = c^*/m^*, \quad \omega = k^*/m^*. \tag{11}$$

Дифференциальное уравнение (11) описывает динамическое состояние обобщенной системы с одной степенью свободы от сейсмического воздействия в виде заданной акселерограммы. Здесь предполагается, что функции  $\varphi(x)$ ,  $c(x)$ ,  $m(x)$ ,  $EI(x)$ ,  $N(x)$  будут заданы в зависимости от геометрических и физико-механических свойств исследуемого объекта. Коэффициент  $\mu$  в (10) характеризует различие между одномассовыми системами с сосредоточенной и обобщенной массами.

**Обобщенные характеристики.** Рассмотрим сооружение башенного типа переменного сечения по высоте. Предполагается, что сооружение круглого сечения в плане состоит из двух центральных колец постоянного сечения, идущих от основания до верхней части объекта и наружных колец, число которых в зависимости от высоты уменьшается. При этом безразмерная функция формы  $\varphi(x)$ , распределенная масса  $m(x)$ , момент инерции  $I(x)$  и нормальная сила  $N(x)$  в исследуемом объекте изменяются по следующим законам:

$$\varphi(x) = 1 - \cos(\pi x / 2l), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{12}$$

$$m(x) = m_1 \cos \frac{\pi x}{2a} + m_0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad m(x) = m_0, \quad a < x \leq l, \tag{13}$$

$$I(x) = I_1 \cos \frac{\pi x}{2a} + I_0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad I(x) = I_0, \quad a < x \leq l, \quad (14)$$

где  $m_1, I_1$  – масса и момент инерции опорной части без учета центральной части;

$m_0, I_0$  – масса и момент инерции центральной части сооружения;

$a$  – длина нижней части сооружения с переменным сечением.

Тогда из (10а) с учетом (12), (13) получим интегральное выражение обобщенной массы:

$$\begin{aligned} m^* &= \int_0^l m(x) \varphi^2(x) dx = \int_0^l \left( m_1 \cos \frac{\pi x}{2a} + m_0 \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{\pi x}{2l} \right) \right]^2 dx = \\ &= m_1 \int_0^a \left( \cos \frac{\pi x}{2a} - \cos \frac{\pi x}{2a} 2 \cos \frac{\pi x}{2l} + \cos \frac{\pi x}{2a} \cos^2 \frac{\pi x}{2l} \right) dx + \\ &+ m_0 \int_0^a \left( 1 - 2 \cos \frac{\pi x}{2l} + \cos^2 \frac{\pi x}{2l} \right) dx + m_0 \int_a^l \left( 1 - 2 \cos \frac{\pi x}{2l} + \cos^2 \frac{\pi x}{2l} \right) dx. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (10б) с учетом (14) и производных от функции формы

$$\varphi'(x) = \left( \frac{\pi}{2l} \right) \sin \frac{\pi x}{2l}, \quad \varphi''(x) = \left( \frac{\pi^2}{4l^2} \right) \cos \frac{\pi x}{2l}$$

получим интегральное выражение обобщенной жесткости изгибающего момента

$$\begin{aligned} k_M^* &= \int_0^l EI(x) (\varphi''(x))^2 dx = \\ &= E \int_0^a \left( I_1 \cos \frac{\pi x}{2a} + I_0 \right) \left( \frac{\pi^2}{4l^2} \cos \frac{\pi x}{2l} \right)^2 dx + EI_0 \int_a^l \left( \frac{\pi^2}{4l^2} \cos \frac{\pi x}{2l} \right)^2 dx = \\ &= \left( \frac{\pi^2}{4l^2} \right)^2 \left[ EI_1 \int_0^a \cos \frac{\pi x}{2a} \left( \cos \frac{\pi x}{2l} \right)^2 dx + EI_0 \int_0^a \left( \cos \frac{\pi x}{2l} \right)^2 dx + EI_0 \int_a^l \left( \cos \frac{\pi x}{2l} \right)^2 dx \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Если предположить, что нормальная сжимающая сила

$$N(x) = N = \gamma A_{\text{cp}} l, \quad A_{\text{cp}} = (A_1 + A_0)/2,$$

где  $\gamma, A_1, A_0$  – объемный вес, площади сечений элементов на внешних кольцах и в центральной части объекта, получаем

$$k_N^* = \int_0^l N(x) (\varphi'(x))^2 dx = \gamma A_{\text{cp}} l \frac{\pi^2}{4l^2} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{2l} dx. \quad (17)$$

Обобщенная масса в правой части (10) выражается следующим образом

$$\begin{aligned} \bar{m} &= \int_0^l m(x) \varphi(x) dx = \int_0^a \left( m_1 \cos \frac{\pi x}{2a} + m_0 \right) \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right) dx + \int_a^l m_0 \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right) dx = \\ &= \int_0^a m_1 \left( \cos \frac{\pi x}{2a} - \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi x}{2l} \right) dx + m_0 \int_0^a \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right) dx + m_0 \int_a^l \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right) dx. \end{aligned} \quad (18)$$

Если принять, что  $a = l/3$ , то непосредственным интегрированием [8] из (15)–(18) получим

$$\begin{aligned}
 m^* &= 0,06406 \times m_1 l + 0,2268 \times m_0 l, \\
 k_M^* &= \pi^3(0,4167EI_1 + 0,7854EI_0)/8l^3, \\
 \bar{m} &= 0,005475m_1 l + 0,3634m_0 l, \\
 k_N^* &= 0,6168 (A_1 + A_0)\gamma, \\
 2\xi\omega &= c^*/m^*, \quad \xi = c^*/m^*2\omega = 0,05
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Полученные обобщенные параметры системы (19), при заданных значениях  $m_0, m_1, I_0, I_1, A_0, A_1$ , позволяют перейти к решению дифференциального уравнения (11). Из решения уравнения (11) определяется  $w(t)$ , а затем с использованием (1) вычисляются перемещения, скорость и ускорения в произвольных точках по оси  $x$ , соответствующие моменту времени  $t$ . Далее вычисляются внутренние усилия в сечениях исследуемого объекта.

При заданной правой части (11) в виде реальной или синтезированной акселерограммы решение осуществляется либо интегралом Дюамеля с последующим численным интегрированием, либо непосредственным численным дифференцированием. Ниже рассматривается реализация обоих методов на примере системы с распределенными параметрами.

**Численное дифференцирование.** С целью численного решения дифференциального уравнения (11) применим метод последовательных аппроксимаций [9, 10], где скорость и ускорения, соответствующие моменту времени  $t_n$ , представляются в виде

$$\dot{w}_n = \frac{\beta_1}{\tau} (w_n - w_{n-1}) - \beta_2 \dot{w}_{n-1} - \tau\beta_3 \ddot{w}_{n-1},
 \tag{20}$$

$$\ddot{w}_n = \frac{\alpha_1}{\tau^2} (w_n - w_{n-1}) - \frac{\alpha_2}{\tau} \dot{w}_{n-1} - \alpha_3 \ddot{w}_{n-1},
 \tag{21}$$

где  $\alpha_i, \beta_i$  – числовые коэффициенты [11];

$\tau = t_n - t_{n-1}$  – шаг по времени.

Записав уравнение (11) в момент времени  $t_n$  и внося (20) и (21) в (11), после некоторых преобразований получим рекуррентную формулу для определения  $w_n$

$$\begin{aligned}
 w_n &= (bw_{n-1} + c\dot{w}_{n-1} + d\ddot{w}_{n-1} - \mu\ddot{w}_{0,n})/a, \\
 &(n = 1, 2, \dots, N), \\
 \alpha &= \frac{\alpha_1}{\tau^2} + 2\xi\omega \frac{\beta_1}{\tau} + \omega^2, \\
 b &= \frac{\alpha_1}{\tau^2} + 2\xi\omega \frac{\beta_1}{\tau}, \quad c = \frac{\alpha_2}{\tau} + 2\xi\omega\beta_2, \quad d = \alpha_3 + \tau\beta_3 2\xi\omega, \\
 \alpha_1 &= \alpha_2 = 4, \quad \alpha_3 = 1, \quad \beta_1 = 2, \quad \beta_2 = 1, \quad \beta_3 = 0.
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Затем с использованием (1) определяются перемещения, скорость и ускорения в произвольной точке координатной оси  $x$ , по длине сооружения, соответствующие моменту времени  $t_n$  дискретной оси  $t$

$$\begin{aligned} W_n(x) &= w_n \varphi(x), \\ \dot{W}_n(x) &= \dot{w}_n \varphi(x), \\ \ddot{W}_n(x) &= \ddot{w}_n \varphi(x). \end{aligned} \quad (23)$$

Затем вычисляются значения сил инерции и сил упругости:

$$f_{in}(x) = m(x) \ddot{W}_{1,n}(x) = m(x) \times (\ddot{w}_n \varphi(x) + \ddot{w}_{0,n}) = m(x) \ddot{w}_n \varphi(x) + m(x) \ddot{w}_{0,n}, \quad (24)$$

$$f_{s,n}(x) = \omega^2 m(x) W(x, t) = \omega^2 m(x) w_n \times \varphi(x). \quad (25)$$

Поперечная сила и изгибающий момент в точке, расположенной на высоте  $h$  от основания сооружения, выражаются следующим образом:

$$Q(t) = \int_h^l f_s(x, t) dx = \omega^2 w_n \int_h^l m(x) \varphi(x) dx, \quad (26)$$

$$M(t) = \int_h^l f_s(x, t) x dx = \omega^2 w_n \int_h^l x m(x) \varphi(x) dx. \quad (27)$$

Если функции  $m(x)$  и  $\varphi(x)$  заданы, то интегралы (26) и (27) вычисляются непосредственным интегрированием.

**Численное моделирование с применением интеграла Дюамеля.** Решение уравнения (11) можно также представить интегралом Дюамеля [7]:

$$w(t) = -\lambda \int_0^t \ddot{w}_0(\tau) \exp[-\xi\omega(t-\tau)] \sin \omega(t-\tau) d\tau, \quad \lambda = \bar{m}/m^* \omega. \quad (28)$$

Этот интеграл с учетом

$$\sin \omega(t-\tau) \sin \omega t \cos \omega t - \cos \omega t \sin \omega t$$

представляется в виде

$$w(t) = -\lambda [a(\omega) \sin \omega t - b(\omega) \cos \omega t], \quad (29)$$

$$a(\omega) = \int_0^t \ddot{w}_0(\tau) \exp[-\xi\omega(t-\tau)] \cos \omega t d\tau,$$

$$b(\omega) = \int_0^t \ddot{w}_0(\tau) \exp[-\xi\omega(t-\tau)] \sin \omega t d\tau.$$

Интегралы  $a(\omega)$  и  $b(\omega)$  в (28) вычисляются методом Симпсона [12]. При этом шаг интегрирования выбирается в зависимости от шага оцифровки заданной акселерограммы  $\ddot{w}_0(t)$ . Затем вычисляются перемещения, скорость и ускорения в произвольной точке сооружения:

$$\begin{aligned}
 W(x,t) &= w(t) \times \varphi(x) = -\lambda [a(\omega) \sin \omega t - b(\omega) \cos \omega t] \varphi(x), \\
 \dot{W}(x,t) &= \dot{w}(t) \times \varphi(x) = -\lambda \omega [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] \varphi(x) - \\
 &\quad - \xi \omega \lambda [a(\omega) \sin \omega t - b(\omega) \cos \omega t] \varphi(x), \\
 \ddot{W}(x,t) &= \ddot{w}(t) \times \varphi(x) = \lambda (1 + 2\xi^2) \omega^2 [a(\omega) \sin \omega t - b(\omega) \cos \omega t] \varphi(x) + \\
 &\quad + 2\xi \omega^2 \lambda [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] \varphi(x).
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

Далее определяются распределенная сила упругости, сдвигающая сила и изгибающий момент в основании сооружения:

$$\begin{aligned}
 f_s(x,t) &= \omega^2 m(x) W(x,t) = \omega^2 m(x) w(t) \times \varphi(x) = \\
 &= -m(x) \varphi(x) \omega \frac{\bar{m}}{m^*} [a(\omega) \sin \omega t - b(\omega) \cos \omega t], \\
 Q_0(t) &= \int_0^l f_s(x,t) dx, \quad M_0(t) = \int_0^l f_s(x,t) x dx.
 \end{aligned}$$

На основе изложенных выше алгоритмов численного моделирования были разработаны компьютерные программы и получены результаты от заданного воздействия в виде акселерограммы землетрясения.

**Пример.** В качестве примера рассматривается сооружение башенного типа (рис. 2), которое состоит из ряда колонн, расположенных во внешних кольцах, а также из двух центральных колец сплошного сечения, соединенных между собой диафрагмами жесткости (рис. 2б). При этом количество внешних колец постепенно уменьшается и на высоте  $x \geq h_1$  остаются только центральные кольца.

Суммарные площади сечений, распределенные массы и моменты инерции несущих элементов центральных ( $A_0, m_0, I_0$ ) и пяти внешних колец ( $A_1, m_1, I_1$ ) равняются:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 27,09 \text{ м}^2, & m_0 &= A_0 \gamma / g = 5,522 \text{ тс}^2/\text{м}^2, \\
 A_1 &= 47,38 \text{ м}^2, & m_1 &= A_1 \gamma / g = 9,659 \text{ тс}^2/\text{м}^2, \\
 I_0 &= 229,4 \text{ м}^4, & I_1 &= 9692,8 \text{ м}^4.
 \end{aligned}
 \tag{а}$$

Обобщенные массы, входящие в левую и правую части дифференциального уравнения (10) при высоте сооружения  $l = 120$  м, получаются соответственно равными:

$$\begin{aligned}
 m^* &= 0,06406 \times m_1 l + 0,2268 \times m_0 l = 224,5 \text{ тс}^2/\text{м}, \\
 \bar{m} &= 0,005475 m_1 l + 0,3634 m_0 l = 247,2 \text{ тс}^2/\text{м}, \\
 \mu &= \bar{m} / m^* = 1,101.
 \end{aligned}
 \tag{б}$$

Обобщенные коэффициенты жесткости, соответствующие изгибу и сжатию сооружения при  $l = 120$  м,  $E = 2 \times 10^6$  т/м,  $\gamma = 2$  т/м<sup>3</sup>, получаются равными:

$$\begin{aligned}
 k_M^* &= \pi^3 (0,4167 E I_1 + 0,7854 E I_0) = 18926,8 \text{ т/м}, \\
 k_N^* &= 0,6168 (A_0 + A_1) \gamma = 91,85 \text{ т/м}, \\
 k^* &= k_M^* - k_N^* = 18834,95 \text{ т/м}.
 \end{aligned}
 \tag{в}$$

Следовательно, частота и период свободных колебаний сооружения

$$\omega = \sqrt{k^*/m^*} = 9,18 \text{ рад/с}, T = 2\pi/\omega = 0,68 \text{ с.} \tag{Г}$$

На основе разработанной программы на языке FORTRAN получены результаты как методом численного дифференцирования, так и методом численного интегрирования. Вначале, на основе (20)–(23), были исследованы свободные колебания сооружения. На рис. 3 показаны графики изменения перемещения  $w_A$  и  $w_L$ , полученные от действия мгновенного импульса при  $\tau = \frac{\Delta t}{4} = 0,005 \text{ с}$  и  $\xi = 0,05$ .

Из этих графиков следует, что период колебаний, полученный численным решением, совпадает с результатом (г).

На втором этапе на основе метода последовательных аппроксимаций исследуются колебания сооружения от действия землетрясения, представленного в виде заданной акселерограммы El Centro. На рис. 4 сравнивается ускорение, полученное для верхней точки сооружения, с графиком ускорения самого землетрясения. Видно, что относительное ускорение сооружения более чем в два раза превышает ускорение его основания.

Получены также результаты с применением алгоритма (28)–(30) и численного решения интеграла Дюамеля при  $\tau = \frac{\Delta t}{2} = 0,01 \text{ с}$  и  $\xi = 0,05$ . На рис. 5 для сопоставления приводятся аналогичные рис. 4 графики, полученные численным интегрированием. Можно заметить, что пиковые ускорения второго метода (рис. 5) несколько меньше, чем в первом методе (рис. 4), хотя характер изменения по времени практически совпадает. По-видимому, это объясняется тем, что шаг по времени в первом методе в два раза меньше, чем во втором.

На рис. 6 приведены графики перемещения верхней точки сооружения, полученные по первому (рис. 6а) и второму методам (рис. 6б). Сравнение показывает их практическое совпадение.

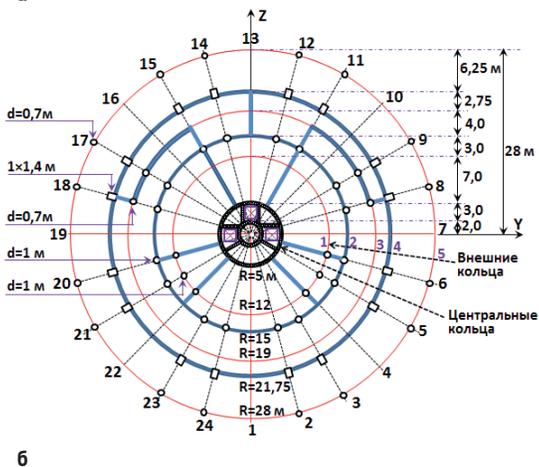
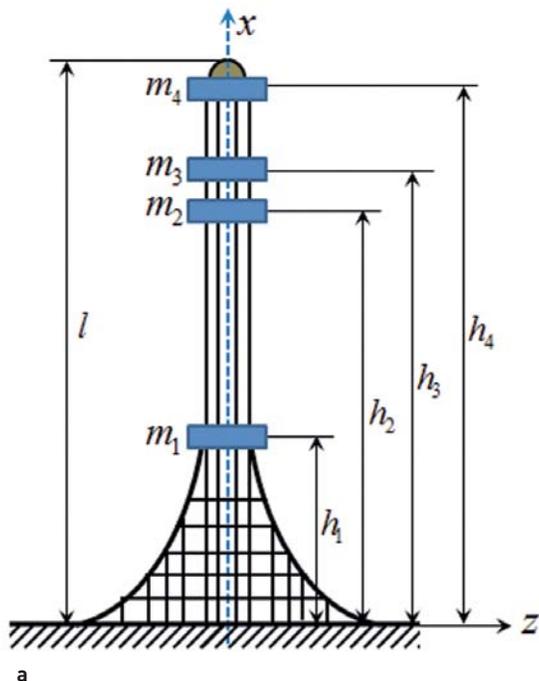


Рис. 2. Геометрия исследуемого сооружения  
Fig. 2. Geometry of the investigated structure



Рис. 3. Графики свободных колебаний  
Fig. 3. Graphs of free vibrations



Рис. 4. Относительное ускорение верхней точки сооружения (численное дифференцирование)  
Fig. 4. Relative acceleration of the top point of the structure (numerical differentiation)



Рис. 5. Относительное ускорение верхней точки сооружения (численное интегрирование)  
Fig. 5. Relative acceleration of the top point of the structure (numerical integration)

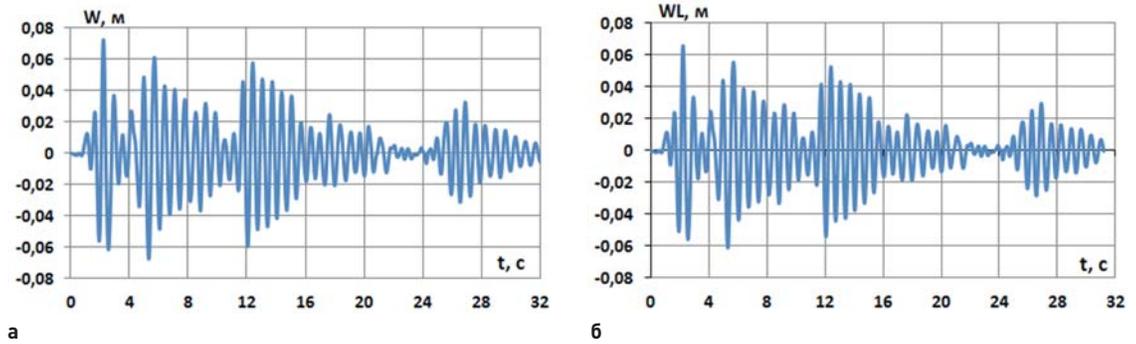


Рис. 6. Сравнение результатов по перемещениям, полученным двумя методами  
 Fig. 6. Comparison of displacement results obtained by the two methods

## Вывод

Разработаны алгоритмы и компьютерные программы, которые позволяют исследовать динамические процессы, связанные с напряженно-деформированным состоянием сооружения, которое представляется в виде обобщенной системы, при различных воздействиях. Достоверность результатов подтверждается сравнением результатов, полученных двумя методами. Разработанные компьютерные программы могут быть использованы для проведения мониторинга уникальных объектов башенного типа.

## Список литературы

1. Клейн Г.К., Рекач В.Г., Розенблат Г.И. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. Москва: Высшая школа; 1972.
2. Артоболевский И.И., Боголюбов А.Н., Болотин В.В., Волоховский В.Ю., Жинжер Н.И., Мишенков Г.В. Вибрации в технике. Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем. Москва: Машиностроение; 1978.
3. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. Москва: Высшая школа; 1972.
4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. Москва: Высшая школа; 1990.
5. Светлицкий В.А., Стасенко И.В. Сборник задач по теории колебаний. Москва: Высшая школа; 1973.
6. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний. Москва: Высшая школа; 1975.
7. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений. Москва: Стройиздат; 1979.
8. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. Москва: Наука; 1973.
9. Низомов Д.Н. Численные методы решения динамических задач строительной механики. Изв. АН Респ. Тадж. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 1993;(1):62–72.
10. Низомов Д.Н. Методы прямого интегрирования дифференциальных уравнений движения дискретных систем. В: Строительство и архитектура: сб. науч. тр. Таджикского технического университета. Душанбе: ТТУ; 1992. Вып. 2, с. 39–46.
11. Низомов Д.Н. Метод граничных уравнений в решении статических и динамических задач строительной механики. Москва: Изд-во АСВ; 2000.
12. Низомов Д.Н., Каландарбеков И.К. Метод сосредоточенных деформаций. Душанбе: Дониш; 2015.
13. Дарков А.В., Шапиро Г.С. Сопротивление материалов. Москва: Высшая школа; 1969.

## References

1. Klein G.K., Rekach V.G., Rozenblat G.I. Guide to practical training in the course of structural mechanics. Moscow: Vysshaya shkola Publ.; 1972. (In Russian).
2. Artobolevskii I.I., Bogolyubov A.N., Bolotin V.V., Volokhovskii V.Yu., Zhinzher N.I., Mishenkov G.V. Vibrations in technology. Vol. 1. Oscillations of linear systems. Moscow: Mashinostroenie Publ.; 1978. (In Russian).
3. Biderman V.L. Applied theory of mechanical vibrations. Moscow: Vysshaya shkola Publ.; 1972. (In Russian).
4. Nikitin N.N. Course of theoretical mechanics. Moscow: Vysshaya shkola Publ.; 1990. (In Russian).
5. Svetlitskii V.A., Stasenko I.V. Collection of problems on the theory of oscillations. Moscow: Vysshaya shkola Publ.; 1973. (In Russian).
6. Yablonskii A.A., Noreiko S.S. Oscillation theory course. Moscow: Vysshaya shkola Publ.; 1975. (In Russian).
7. Klaf R., Penzien J. Dynamics of structures. Moscow: Stroizdat Publ.; 1979. (In Russian).
8. Dwight H.B. Tables of integrals and other mathematical data. Moscow: Nauka Publ.; 1973.
9. Nizomov D.N. Numerical methods for solving dynamic problems of structural mechanics. Izvestiya Akademii nauk Respubliki Tadjikistan. Otdelenie fiziko-matematicheskikh, khimicheskikh, geologicheskikh i tekhnicheskikh nauk = News of the National Academy of Sciences of Tajikistan. Department of physical, mathematical, chemical, geological and technical sciences. 1993;(1):62–72. (In Russian).
10. Nizomov D.N. Methods of direct integration of differential equations of motion of discrete systems. In: Construction and architecture. Collection of scientific works of the Tajik Technical University. Dushanbe: Tajik Technical University; 1992. Issue 2, pp. 39–46. (In Russian).
11. Nizomov D.N. Method of boundary equations in solving static and dynamic problems of structural mechanics. Moscow: Publishing House ASV; 2000. (In Russian).
12. Nizomov D.N., Kalandarbekov I.K. Method of concentrated deformations. Dushanbe: Donish Publ.; 2015. (In Russian).
13. Darkov A.V., Shapiro G.S. Strength of materials. Moscow: Vysshaya shkola Publ.; 1969. (In Russian).

## Информация об авторах / Information about the authors

**Джахонгир Низомович Низомов**, д-р техн. наук, профессор, член-корреспондент НАНТ, заведующий лабораторией сейсмостойкости зданий и сооружений Института геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАНТ, Душанбе

e-mail: tiees@mail.ru

**Djahongir N. Nizomov**, Dr. Sci. (Engineering), Professor, Corresponding Member of NAST, Head of the Laboratory of Earthquake Resistance of Buildings and Structures, Institute of Geology, Earthquake-Resistant Construction and Seismology of the NAST, Dushanbe

e-mail: tiees@mail.ru

**Абдусамад Мирвафоевич Сангинов**<sup>✉</sup>, канд. техн. наук, ведущий научный сотрудник лаборатории сейсмостойкости зданий и сооружений Института геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАНТ, Душанбе

e-mail: samad80@mail.ru

**Abdusamad M. Sanginov**<sup>✉</sup>, Cand. Sci. (Engineering), Leading Researcher, Laboratory of Earthquake Resistance of Buildings and Structures, Institute of Geology, Earthquake-Resistant Construction and Seismology of the NAST, Dushanbe

e-mail: samad80@mail.ru

**Муродбек Мухтор Саломзода**, директор государственного унитарного предприятия «Научно-исследовательский институт «Строительство и архитектура» (ГУП «НИИСА») Комитета по архитектуре и строительству при Правительстве Республики Таджикистан, Душанбе

e-mail: murodbek\_sm@mail.ru

**Murodbek Mukhtor Salomzoda**, Director of the State Unitary Enterprise “Research Institute “Construction and Architecture” of the Committee on Architecture and Construction under the Government of the Republic of Tajikistan, Dushanbe

e-mail: murodbek\_sm@mail.ru

✉ Автор, ответственный за переписку / Corresponding author