

УДК 534.1

[https://doi.org/10.37538/2224-9494-2024-2\(41\)-7-17](https://doi.org/10.37538/2224-9494-2024-2(41)-7-17)

EDN: BRFAUI

СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛОК ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ

Л.А. БАРАГУНОВА✉

М.М. ШОГЕНОВА, канд. ф.-м. наук

О.М. ШОГЕНОВ, канд. техн. наук

И.А. ЖИРИКОВА

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, ул. Чернышевского, д. 173, г. Нальчик, 360004, Российская Федерация

Аннотация

Введение. Многолетний опыт проектирования и эксплуатации сооружений показывает, что для обеспечения их надежности недостаточно проведения только расчетов на прочность. Кроме обеспечения прочности и жесткости сооружений к ним часто предъявляются требования по учету влияния колебаний. Данные типы расчетов являются сложными, так как должно быть учтено большое количество самых различных факторов. В настоящее время сооружения все больше усложняются, и большое внимание уделяется расчетам на сейсмические воздействия на здания, что весьма актуально для районов строительства, где сейсмичность повышена. В инженерных сооружениях возникает повышенная напряженность, которая обуславливается этими и другими причинами. Свободные и вынужденные колебания различных упругих конструкций представляют несомненный возрастающий интерес и имеют обширную библиографию.

Цель настоящей статьи состоит в постановке полной математической задачи для двух наиболее распространенных способов закрепления концов балки, в определении спектров собственных частот и форм колебаний.

Материалы и методы. Рассматривается балка переменного сечения из однородного материала под действием поперечной распределенной нагрузки, которая совершает изгибные колебания. Свободные и вынужденные колебания описываются дифференциальными уравнениями. Сначала решается однородное уравнение, затем – неоднородное. Применен принцип Даламбера. Использован метод разделения переменных. Выполнены тестовые проверки.

Результаты. Получено дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка с постоянными коэффициентами. Определены спектры собственных частот и форм колебаний. Высокая точность полученных результатов позволяет более коротким путем с наименьшим объемом вычислений определять характеристики свободных и вынужденных колебаний балок. Обнаружен интересный факт зависимости амплитуды и формы вынужденных колебаний стержней от близости частоты возмущений к собственным значениям и сдвига фаз компонентов векторного процесса возмущений.

Выводы. Выдвинуты гипотезы о существовании зависимости между коэффициентами затухания и линейно-вязкого трения материала, а также о постоянстве коэффициента затухания для всех собственных значений.

Ключевые слова: изгибные колебания, стержень переменного сечения, поперечная распределенная нагрузка, принцип Даламбера, уравнение четвертого порядка, спектры собственных частот, собственные функции колебаний, граничные условия, осевой момент инерции, модуль упругости, даламберова сила инерции

Для цитирования: Барагунова Л.А., Шогенова М.М., Шогенов О.М., Жирикова И.А. Свободные и вынужденные колебания балок под действием распределенной нагрузки. *Вестник НИЦ «Строительство»*. 2024;41(2):7–17. [https://doi.org/10.37538/2224-9494-2024-2\(41\)-7-17](https://doi.org/10.37538/2224-9494-2024-2(41)-7-17)

Вклад авторов

Все авторы внесли равноценный вклад в подготовку публикации.

Финансирование

Исследование не имело спонсорской поддержки.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию 02.04.2024

Поступила после рецензирования 19.04.2024

Принята к публикации 25.04.2024

FREE AND FORCED VIBRATIONS OF BEAMS UNDER DISTRIBUTED LOAD

L.A. BARAGUNOVA 

M.M. SHOGENOVA, Cand. Sci. (Phys.-Math.)

O.M. SHOGENOV, Cand. Sci. (Engineering)

I.A. ZHIRIKOVA

Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, Chernyshevskogo str., 173, Nalchik, 360004, Russian Federation

Abstract

Introduction. Many years of experience in design and operation of structures prove that the reliability of structures cannot be ensured by strength calculations alone. In addition to strength and stiffness of structures, their vibrations are often required to be considered. These types of calculations appear highly comprehensive, involving a large number of different factors to be taken into account. At present, as structures are becoming more and more complex, great attention is paid to seismic design, which is especially relevant for buildings subjected to high seismic loads. Engineering structures experience increased loads associated with the above-mentioned and other reasons. Free and forced vibrations of various elastic structures obtain a significant relevance among researchers as manifested by numerous publications on this issue.

Aim. To present a complete mathematical problem for the two most common methods of end restraint, to determine natural frequency spectrum and eigenforms of beam vibrations.

Materials and methods. The present study involves a beam of variable cross-section made of homogeneous material, subjected to transverse distributed load, which makes bending vibrations. Free and forced vibrations are described by differential equations. The homogeneous equation is solved first, then – the nonhomogeneous equation. The study involves application of D'Alembert's principle, variable separation method, and test checks.

Results. The authors obtained a fourth-order partial differential equation with constant coefficients and determined a natural frequency spectrum and eigenforms of vibrations. A high accuracy of the obtained results enables the characteristics of free and forced vibrations of beams to be determined in a shorter way with fewer calculations. Notably, the amplitude and eigenform of forced vibrations of beams appear dependent on the proximity of the disturbing frequency to the eigenvalues and the phase change of components in vector disturbance process.

Conclusions. The authors advanced hypotheses about a dependence between the damping and linear viscous friction coefficients as well as about the constancy of damping coefficient for all eigenvalues.

Keywords: bending vibrations, beam of variable cross-section, transverse distributed load, D'Alembert's principle, fourth-order equation, spectra of natural frequencies, eigenfunctions of vibrations, boundary conditions, axial moment of inertia, elastic modulus, D'Alembert force, inertial force

For citation: Baragunova L.A., Shogenova M.M., Shogenov O.M., Zhirikova I.A. Free and forced vibrations of beams under distributed load. *Vestnik NIC Stroitel'stvo = Bulletin of Science and Research Center of Construction*. 2024;41(2):7–17. (In Russian). [https://doi.org/10.37538/2224-9494-2024-2\(41\)-7-17](https://doi.org/10.37538/2224-9494-2024-2(41)-7-17)

Authors contribution statement

All authors made equal contributions to the study and the publication.

Funding

No funding support was obtained for the research.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Received 02.04.2024

Revised 19.04.2024

Accepted 25.04.2024

Постановка краевой задачи

Однородный стержень (рис. 1) длины l с погонной массой m , с осевым моментом инерции поперечного сечения J , из материала с модулем упругости E под действием поперечной распределенной нагрузки $q(x, t)$ совершает изгибные колебания, описываемые функцией $u(x, t)$.

Изучению вынужденных колебаний, как правило, предшествует решение задачи о свободных колебаниях [1, 2]. Математически это означает, что сначала решается однородное уравнение, затем – неоднородное. При свободных колебаниях поперечная нагрузка и другие возмущения отсутствуют, т. е. $f(x, t) \equiv 0$. Рассмотрим стержень переменного сечения из однородного материала, опирающийся по концам шарнирно (рис. 2). Такая задача имеет важное прикладное значение, так как она является базовой для всех других видов колебаний (вынужденных, кинематически возбуждаемых, параметрических и т. д.) [3–5].

Для вывода уравнения колебаний выделим элемент стержня длиной dx (рис. 3) и покажем все силы, приложенные к нему: M – изгибающий момент, Q – поперечная сила, dJ – даламберова сила инерции, dR – сила вязкого трения (демпфирования). Последние направлены

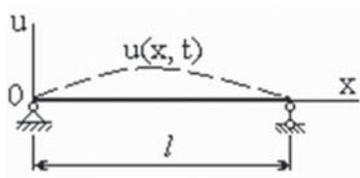


Рис. 1. Расчетная схема
 Fig. 1. Design diagram

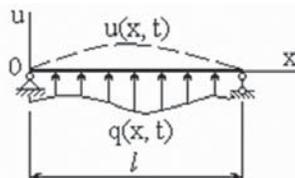


Рис. 2. Стержень под распределенной нагрузкой
 Fig. 2. Beam under distributed load

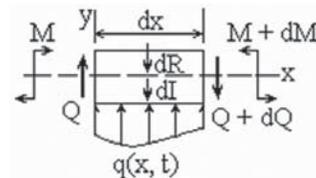


Рис. 3. Элемент стержня длиной dx
 Fig. 3. Beam element with length dx

вниз, являются следствием движения со скоростью и ускорением, направленными вверх, вычисляются по формулам

$$dI = m\ddot{u}dx, \quad dR = \eta m\dot{u}dx. \tag{1}$$

Здесь $m = \rho S$;

ρ – плотность материала;

S – площадь поперечного сечения балки;

η – коэффициент демпфирования, точки над функциями означают дифференцирование по времени t .

По теории изгибных колебаний балок считается, что выделенный элемент стержня на рис. 3 принимается горизонтальным, а силы, приложенные к нему, – вертикальными.

Применяя принцип Даламбера, получим уравнение движения в виде равенства нулю суммы проекций всех сил на вертикальную ось

$$\sum_i Y_i = 0, \quad Q - Q - Q'dx + qdx - dI - dR = 0. \tag{2}$$

Штрихи в индексах соответствуют дифференцированию по x . Из курса сопротивления материалов известно, что

$$Q = M', \quad M = EJ u''. \tag{3}$$

В уравнении (2) сократим Q , учтем (1), (3) и получим

$$-M''dx + qdx - m\ddot{u}dx - \eta m\dot{u}dx = 0.$$

Далее простейшие преобразования дают уравнение

$$(EJu'')'' + m\ddot{u} + \eta m\dot{u} = q(x, t), \tag{4}$$

четвертого по переменной x , второго порядка по переменной t с переменными коэффициентами. При рассмотрении колебаний балки постоянного сечения из однородного материала уравнение (4) упрощается и приобретает вид уравнения в частных производных четвертого порядка, того же порядка, но с постоянными коэффициентами

$$EJu^{IV} + m\ddot{u} + \eta m\dot{u} = q(x, t), \quad u^{IV} + \gamma\ddot{u} + \varepsilon\dot{u} = f(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t > -\infty. \tag{5}$$

$$\gamma = m/EJ, \quad f(x, t) = q(x, t)/EJ.$$

Здесь и далее IV в верхнем индексе обозначает четвертую производную по x . Уравнение (4) является основным уравнением колебаний балки. К нему необходимо присоединить дополнительные краевые условия: начальные, граничные.

Далее будут рассматриваться установившиеся колебания балки при гармонических возмущениях, которым будут соответствовать периодические решения. Поэтому начальные условия не потребуются, а граничные условия будут зависеть от способов опирания концов стержня и действующих здесь возмущений.

Уравнения (4), (5) являются дифференциальными уравнениями четвертого порядка по переменной x . Поэтому необходимо присоединить четыре граничных условия: по два на каждом конце балки.

Нетрудно заметить, что возмущения подразделяются на кинематические и динамические. Кинематическими являются возмущения в виде перемещений: линейных, угловых. Динамические возмущения представляются распределенными нагрузками, сосредоточенными силами и парами сил с моментами.

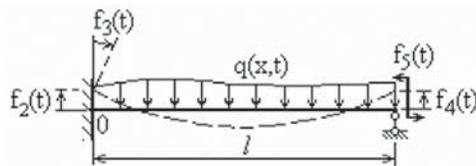


Рис. 4. Балка, «заделанная» на левом конце и опертая на правом конце

Fig. 4. Beam restrained on the left and supported on the right

Пример постановки полной математической задачи покажем на двух наиболее распространенных способах закрепления концов балки.

1) Шарнирно-опертая балка (рис. 4). Возмущениями, действующими на такую балку, являются распределенная нагрузка $q(x, t)$, вертикальные перемещения левого конца, моментная нагрузка, приложенная к шарниру левого конца, вертикальные перемещения правого конца, моментная нагрузка, приложенная к шарнирно-подвижному правому концу. Основное уравнение и граничные условия в совокупности образуют задачу

$$u^{IV} + a\ddot{u} + \varepsilon\dot{u} = f_1(x, t), \quad f_1(x, t) = -q(x, t)/EJ \quad x \in (0, l), \quad t > -\infty. \quad (6)$$

$$u(0, t) = f_2(t), \quad EJ u''(0, t) = f_3(t), \quad u'(0, t) = f_3(t),$$

$$u(l, t) = f_4(t), \quad EJ u''(l, t) = f_5(t). \quad (7)$$

Знак минус в уравнении f_1 учитывает противоположность между принятым в данной задаче направлением распределенной нагрузки и ее положительным направлением.

2) Балка, «заделанная» на левом конце и шарнирно опертая на правом конце (рис. 4).

Возмущения, действующие на такую балку, будут такими же, как и в предыдущем примере, за исключением $f_3(t)$. Здесь $f_3(t)$ – угловые перемещения левого конца балки. Основное уравнение колебания балки (6) остается без изменения, но граничные условия для этой балки уже другие

$$u(0, t) = f_2(t), \quad u'(0, t) = f_3(t), \quad u(l, t) = f_4(t), \quad EJ u''(l, t) = f_5(t). \quad (8)$$

Заметим, что возмущения для обоих способов закрепления балки являются вектор-функцией с пятью компонентами.

$$f(x, t) = \{f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t), f_5(t)\}. \quad (9)$$

Задача далее будет состоять в том, чтобы по заданной функции $f(x, t)$ отыскать решение $u(x, t)$.

Дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

Свободные колебания рассмотрим для способов закрепления балки, показанных на рис. 3 и 4, в той же очередности.

1) Шарнирно-опертая балка.

Для свободных колебаний задача (6), (7) принимает вид

$$u^{IV} + \gamma\ddot{u} + \varepsilon\dot{u} = 0, \quad x \in (0, l), \quad t > -\infty. \quad (10)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u''(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad u''(l, t) = 0. \quad (11)$$

Эти условия означают, что в процессе колебаний концы балки не перемещаются в вертикальном направлении, и, как следствие шарнирного опирания, изгибающие моменты в конечных сечениях являются нулевыми.

Далее задача состоит в определении спектров собственных частот и форм.

С целью применения метода разделения переменных запишем

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (12)$$

Подставим (12) в (10) и получим

$$X^{IV}T + \gamma X\dot{T} + \varepsilon X\ddot{T} = 0,$$

разделим на произведение X и T и запишем результат

$$\frac{X^{IV}}{X} + \gamma \frac{\dot{T}}{T} + \varepsilon \frac{\ddot{T}}{T} = 0. \quad (13)$$

Первое слагаемое зависит от x , а остальные два – от t . Поэтому уравнение (13) может быть верным лишь при выполнении условия

$$-\frac{X^{IV}}{X} = \gamma \frac{\dot{T}}{T} + \varepsilon \frac{\ddot{T}}{T} = -\Lambda^4, \quad (14)$$

где Λ – некоторое число. Полученный результат содержит два уравнения. Рассмотрим второе равенство

$$-\frac{X^{IV}}{X} = -\Lambda^4, \quad \Rightarrow \quad X^{IV} - \Lambda^4 X = 0. \quad (15)$$

Подставляя (12) в (13), (14), находим граничные условия

$$X(0) = 0, \quad X''(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad X''(l) = 0. \quad (16)$$

Надо найти такое значение Λ , чтобы задача (15), (16) имела ненулевое решение. Это – задача Штурма – Лиувилля. Уравнение (15) имеет общее решение

$$X(x) = C_1 \sin \Lambda x + C_2 \cos \Lambda x + C_3 \operatorname{sh} \Lambda x + C_4 \operatorname{ch} \Lambda x. \quad (17)$$

Дважды дифференцируя, получим

$$X''(x) = \Lambda^2 (-C_1 \sin \Lambda x - C_2 \cos \Lambda x + C_3 \operatorname{sh} \Lambda x + C_4 \operatorname{ch} \Lambda x). \quad (18)$$

Первые два условия в (16) дают

$$C_2 + C_4 = 0, \quad -C_2 + C_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = C_4 = 0.$$

Тогда (17), (18) упрощаются

$$X(x) = C_1 \sin \Lambda x + C_3 \operatorname{sh} \Lambda x, \quad X''(x) = \Lambda^2 (-C_1 \sin \Lambda x + C_3 \operatorname{sh} \Lambda x).$$

С их учетом последние два условия в (16) принимают вид

$$C_1 \sin \Lambda l + C_3 \operatorname{sh} \Lambda l = 0, \quad -C_1 \sin \Lambda l + C_3 \operatorname{sh} \Lambda l = 0. \quad (19)$$

Приравняем определитель системы уравнений к нулю, чтобы получить нетривиальное решение задачи, и приходим к трансцендентному уравнению

$$2 \sin \Lambda l \operatorname{sh} \Lambda l = 0. \quad (20)$$

Если $\operatorname{sh} \Lambda l = 0$, то $\Lambda l = 0 \Rightarrow X(x) = 0$.

Это решение тривиальное, и оно соответствует равновесному состоянию при отсутствии колебаний. Интерес представляют нетривиальные решения, соответствующие колебаниям. Поэтому приравняем к нулю другой сомножитель в левой части (20)

$$\sin \Lambda l = 0 \Rightarrow \Lambda l = k\pi, \quad \Lambda = \Lambda_k = \frac{k\pi}{l}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (21)$$

Из (20)

$$\operatorname{sh} \Lambda l \neq 0, \quad \sin \Lambda l = 0 \Rightarrow C_3 = 0.$$

Окончательно для формы колебаний имеем

$$X(x) = C_1 \sin \Lambda_k x, \quad k = 1, 2, \dots$$

Без постоянного сомножителя эти функции представляют собой спектр собственных функций колебаний

$$\varphi_k(x) = \sin \Lambda_k x, \quad k = 1, 2, \dots \quad (22)$$

Обратимся к первому из уравнений (14) и запишем его в виде

$$\gamma \ddot{T} + \varepsilon \dot{T} + \Lambda_k^4 T = 0. \quad (23)$$

Его характеристическое уравнение

$$\gamma r^2 + \varepsilon r + \Lambda_k^4 = 0 \quad (24)$$

имеет корни

$$r_{1,2} = -\frac{\varepsilon}{2\gamma} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2\gamma}\right)^2 - \frac{\Lambda_k^4}{\gamma}} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^4},$$

$$\mu = \frac{\varepsilon}{2\gamma} = \frac{\eta}{2}, \quad a^4 = \frac{1}{\gamma} = \frac{EJ}{m} \Rightarrow a = \sqrt[4]{\frac{EJ}{m}}.$$

Обычно $\mu^2 < \Lambda_k^4$. Поэтому можно записать

$$r_{1,2} = -\mu \pm i \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^4 - \mu^2} = -\mu \pm i \omega_{k\mu}.$$

Здесь обозначено

$$\omega_{k\mu} = \sqrt{\omega_{k0}^2 - \mu^2}, \quad \omega_{k0} = \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (25)$$

Решения уравнения (23) имеют вид

$$T_k(t) = e^{-\mu t} (A_k \cos \omega_{k\mu} t + B_k \sin \omega_{k\mu} t), \quad k = 1, 2, \dots \quad (26)$$

В силу (26) формулы (25) определяют спектры собственных частот. Первая – при наличии сил трения, вторая – при их отсутствии.

Спектры собственных частот и форм могут быть найдены и другим, более легким способом [6–8]. С этой целью учтем затухающий характер свободных колебаний балки и запишем решение задачи (10), (11) в виде

$$u(x, t) = X(x) e^{rt}. \quad (27)$$

Здесь

$$r = -\mu + i\omega, \quad \mu > 0, \quad \omega > 0, \quad (28)$$

r – характеристический показатель;

μ и ω – подлежащие определению коэффициент затухания и частота свободных колебаний.

Подстановка (27) в (10), (11) дает

$$X^{IV} + (\gamma r^2 + \epsilon r)X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (29)$$

Введем обозначение

$$d^4 = -\gamma r^2 - \epsilon r \quad (30)$$

и перепишем задачу (29) в виде

$$X^{IV} - d^4 X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X''(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad X''(l) = 0. \quad (31)$$

Задачи (15), (16) и (31) совпадают с точностью до обозначения коэффициентов Λ и d . Следовательно, по аналогии с (24) можно записать

$$d = d_k = \frac{k\pi}{l}, \quad k \in N. \quad \gamma r^2 + \epsilon r + d^4 = 0.$$

Полученное уравнение совпадает с характеристическим уравнением (27), значит, мы пришли к тому же решению, но более коротким путем.

2) Балка, «заделанная» на левом конце и свободно опертая на правом.

Для такой балки при $f(t) \equiv 0$ задача принимает вид

$$u^{IV} + \gamma \ddot{u} + \epsilon \dot{u} = 0, \quad x \in (0, l), \quad t > -\infty, \quad (32)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u'(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad u''(l, t) = 0, \quad t > -\infty. \quad (33)$$

Повторение предыдущих выкладок приводит к новой системе уравнений относительно произвольных постоянных, из которой следует

$$C_2 = C_4 = 0, \quad C_1 \sin \Lambda l + C_3 \operatorname{sh} \Lambda l = 0, \quad C_1 \cos \Lambda l + C_3 \operatorname{ch} \Lambda l = 0.$$

Условие существования нетривиального решения этой системы дает уравнение частот

$$\operatorname{tg}\Lambda l = \operatorname{th}\Lambda l.$$

Это уравнение трансцендентное, решение можно получить только в приближенной форме. Следующая формула дает ненулевые корни этого уравнения с довольно большой точностью

$$\Lambda_k = \frac{\pi}{l} \left(k + \frac{1}{4} \right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

При $k = 1$ погрешность составляет около 0,5%, с увеличением k погрешность очень быстро стремится к нулю.

После повторения процедуры предыдущего примера получаем

$$\mu = \frac{\eta}{2}, \quad \omega_{\mu k} = \sqrt{\omega_{0k}^2 - \mu^2}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (34)$$

Здесь

$$\omega_{0k} = \Lambda_k^2 = \left(\frac{\pi a}{l} \right)^2 \left(k + \frac{1}{4} \right)^2$$

ω_{0k} – частоты свободных колебаний при отсутствии трения, $\omega_{\mu k}$ – то же при наличии трения. Собственные функции колебаний, соответствующие каждой частоте, имеют вид

$$\varphi_k = \sin \Lambda_k (l - x) - \frac{\sin \Lambda_k l}{\operatorname{sh} \Lambda_k l} \operatorname{sh} \Lambda_k (l - x), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (35)$$

Пример 1. Стальная балка изготовлена из двутавра № 14 длиной $l = 6$ м. Численные характеристики принятой балки: удельная плотность стали $\rho = 7800$ кг/м³, модуль упругости $E = 200$ ГПа, площадь поперечного сечения $S = 17,4$ см², момент инерции сечения $J = 572$ см⁴, $\eta = 1$ с⁻¹.

Определим первые три элемента спектров собственных значений и функций для рассмотренных двух случаев закрепления концов балки.

Погонная масса и коэффициент уравнения колебаний

$$m = \rho S = 7800 \times 17,4 \times 10^{-4} = 13,57 \text{ кг/м},$$

$$a = \sqrt[4]{\frac{EJ}{m}} = \sqrt[4]{\frac{200 \times 10^9 \times 572 \times 10^{-8}}{13,57}} = 17,04 \text{ мс}^{-1/2}.$$

Вычисления по формулам (25) и (34) дают спектры собственных значений: для шарнирно-опертой балки (значения в скобках при отсутствии трения)

$$\omega_{k\text{ш}} (\omega_{k0}) = \{79,59 (79,60), 318,38 (318,38), 716,36 (716,36), \dots\} \text{ с}^{-1},$$

для балки с защемленным левым и шарнирно-опертым правым концом

$$\omega_{k\text{ц}} (\omega_{k0}) = \{124,35 (124,36), 402,95 (402,95), 840,73 (840,73), \dots\} \text{ с}^{-1}.$$

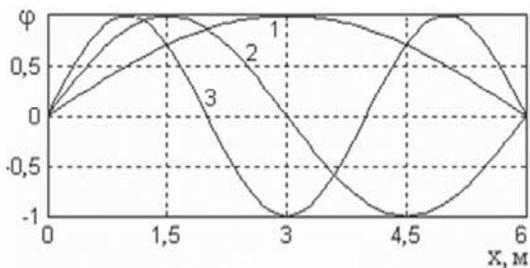


Рис. 5. Собственные функции колебаний
Fig. 5. Eigenfunctions of vibrations

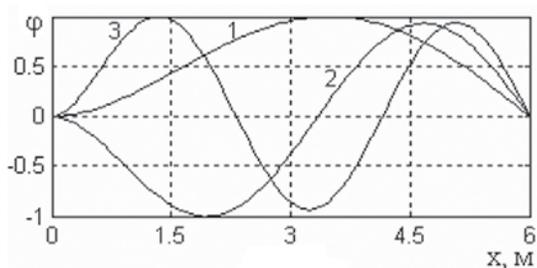


Рис. 6. Спектр собственных функций
Fig. 6. Spectrum of eigenfunctions

Элементы спектра собственных функций определяются по формулам (22) и (35).

Вычисления и графики, выполненные на компьютере, представлены кривыми на рис. 5 и 6. Номера кривых соответствуют коэффициентам k в формулах (9) и (10).

Список литературы

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. Москва: Наука, глав. ред. физ.-мат. лит.; 1968.
2. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. Москва: Высшая школа; 1979.
3. Масленников А.М. Динамика и устойчивость сооружений. Москва: Издательство Юрайт; 2016.
4. Амосов А.А., Синицын С.Б. Основы теории сейсмостойкости сооружений. Москва: Издательство АСВ; 2001.
5. Амосов А.А., Синицын С.Б. Основы теории сейсмостойкости сооружений. Москва: Издательство АСВ; 2010.
6. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. Изд. 2-е. Москва: Физматлит; 2006.
7. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н. Математические методы в строительной механике (с основами теории обобщенных функций). Москва: Издательство АСВ; 2008.
8. Kulterbayev Kh.P., Shogenova M.M., Baragunova L.A. On the Influence of the Characteristic Frequency and Broadband of Seismic Effects on the Vertical Rod Oscillations. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020;753(3):042040. <https://doi.org/10.1088/1757-899x/753/4/042040>
9. Культербаев Х.П., Чеченов Т.Ю., Барагунов Т.М. Вынужденные колебания континуально-дискретной многопролетной балки при учете инерционных сил вращения. Вестник ВолГАСУ. Серия: Строительство и архитектура. 2012;(26):48–55.
10. Культербаев Х.П. Основы теории колебаний. Основы теории, задачи для домашних заданий, примеры решений. Нальчик: Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова; 2003.

References

1. Babakov I.M. Theory of oscillations. Moscow: Nauka, The main editorial office of the physics and mathematics literature; 1968. (In Russian).
2. Biderman V.L. Applied theory of mechanical vibrations. Moscow: Vysshaya shkola Publ.; 1979. (In Russian).
3. Maslennikov A.M. Dynamics and stability of structures. Moscow: Yurayt Publishing House; 2016. (In Russian).
4. Amosov A.A., Sinitsyn S.B. Fundamentals of the theory of seismic resistance of structures. Moscow: ASV Publ.; 2001. (In Russian).
5. Amosov A.A., Sinitsyn S.B. Fundamentals of the theory of seismic resistance of structures. Moscow: ASV Publ.; 2010. (In Russian).
6. Formalev V.F., Revisnikov D.L. Numerical methods. 2nd edition. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2006. (In Russian).
7. Zolotov A.B., Akimov P.A., Sidorov V.N. Mathematical methods in structural mechanics (with the basics of the theory of generalized functions). Moscow: ASV Publ.; 2008. (In Russian).

8. *Kulterbayev Kh.P., Shogenova M.M., Baragunova L.A.* On the Influence of the Characteristic Frequency and Broadband of Seismic Effects on the Vertical Rod Oscillations. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020;753(3):042040. <https://doi.org/10.1088/1757-899x/753/4/042040>
9. *Kulterbaev H.P., Chechenov T.Yu., Baragunov T.M.* Forced oscillations of a continually discrete multi-span beam taking into account inertial forces of rotation. Bulletin of the Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering. Series: Construction and Architecture. 2012;(26):48–55. (In Russian).
10. *Kulterbaev H.P.* Fundamentals of the theory of oscillations. Fundamentals of theory, homework tasks, examples of solutions. Nalchik: Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov; 2003. (In Russian).

Информация об авторах / Information about authors

Лялюся Адальбиевна Барагунова , старший преподаватель кафедры строительных конструкций и механики, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Нальчик
e-mail: baragunoval@mail.ru
тел.: +7 (928) 075-62-99

Lyalusya A. Baragunova , Senior Lecturer, Department of Engineering Structures and Mechanics, Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, Nalchik
e-mail: baragunoval@mail.ru
tel.: +7 (928) 075-62-99

Марьяна Мухарбиевна Шогенова, канд. ф.-м. наук, доцент, доцент кафедры строительных конструкций и механики, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Нальчик
e-mail: shogenova_mar@mail.ru
тел.: +7 (928) 710-50-45

Maryana M. Shogenova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Engineering Structures and Mechanics, Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, Nalchik
e-mail: shogenova_mar@mail.ru
tel.: +7 (928) 710-50-45

Олег Мухамедович Шогенов, канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры строительных конструкций и механики, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Нальчик
e-mail: shogenova_mar@mail.ru
тел.: +7 (928) 705-59-16

Oleg M. Shogenov, Cand. Sci. (Engineering), Associate Professor, Department of Engineering Structures and Mechanics, Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, Nalchik
e-mail: shogenova_mar@mail.ru
tel.: +7 (928) 705-59-16

Инна Аликовна Жирикова, старший преподаватель кафедры строительного производства, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Нальчик
e-mail: innazh94@mail.ru
тел.: +7 (988) 720-22-16

Inna A. Zhirikova, Senior Lecturer, Department of Construction Production, Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, Nalchik
e-mail: innazh94@mail.ru
tel.: +7 (988) 720-22-16

 Автор, ответственный за переписку / Corresponding author