

КОЭФФИЦИЕНТ ГРАДИЕНТА ЭКВИВАЛЕНТНОГО МОМЕНТА ПРИ ПЛОСКОЙ ФОРМЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ БАЛОК ДВУТАВРОВОГО СЕЧЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ ВЫСОТОЙ СТЕНКИ

А.О. ИЛЬЮШЕНКОВ¹

¹АО «Территориальный проектный институт «Хабаровскпромпроект», Уссурийский бульвар, д. 2, г. Хабаровск, 680000, Россия

Аннотация

Введение. Исследуется устойчивость симметричных двутавровых балок с переменной высотой стенки, подверженных действию неравных концевых моментов. Влияние угла конусности, которое играет главную роль в поведении балки с переменной высотой стенки при изгибно-крутильной потере устойчивости, исследовано путем уточнения дифференциальных уравнений технической теории Власова открытых тонкостенных стержней. Аналитические решения уточненных дифференциальных уравнений приводятся на основе метода Бубнова – Галеркина через закон изменения момента инерции поперечного сечения балки вдоль ее оси. Окончательное бифуркационное уравнение упругого критического момента содержит новые члены, включающие коэффициенты редукции поперечного сечения. Эквивалентный коэффициент градиента момента для всего диапазона значений определяется и приводится в замкнутой форме относительно угла наклона поясов. Сравнительные графики показывают согласование аналитических и численных решений. Эти результаты могут быть использованы для формулирования критериев потери устойчивости для призматических и конических двутавровых балок и могут быть интегрированы в текущие методы проектирования.

Цель. Разработать единое уравнение для коэффициента градиента эквивалентного момента. Уточнить техническую теорию Власова для балок с конической стенкой двутаврового сечения.

Материалы и методы. В работе использована уточненная техническая теория Власова и аналитический метод Бубнова – Галеркина.

Результаты. На основе полученных уточнений получено замкнутое решение упругой изгибно-крутильной потери устойчивости двутавровой балки с переменной высотой стенки. Представлен аналитический метод расчета.

Результаты показывают отличное согласие численных и аналитических решений. Уравнения представлены в замкнутом виде, аналогичном случаю постоянного поперечного сечения, но с дополнительными коэффициентами, что позволяет интегрировать разработанное решение в существующие методы расчета.

Выводы. В представленной теоретической работе разработан единый метод расчета упругого критического момента и коэффициента градиента эквивалентного момента для балок с конической стенкой двутаврового сечения при изгибно-крутильной потере устойчивости.

Ключевые слова: изгибно-крутильная потеря устойчивости, коэффициент градиента момента, редукция, конические элементы, стальные балки, тонкостенные стержни, секториальная характеристическая теория, дифференциальные уравнения, упругий критический изгибающий момент, метод Бубнова – Галеркина

Для цитирования: Ильющенков А.О. Коэффициент градиента эквивалентного момента при плоской форме потери устойчивости балок двутаврового сечения с переменной высотой стенки // Вестник НИЦ «Строительство». 2026. № 1 (48). С. 56–73. [https://doi.org/10.37538/2224-9494-2026-1\(48\)-56-73](https://doi.org/10.37538/2224-9494-2026-1(48)-56-73)

Вклад автора

Автор берет на себя ответственность за все аспекты работы над статьей.

Финансирование

Исследование не имело спонсорской поддержки.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию 12.12.2025

Поступила после рецензирования 20.01.2026

Принята к публикации: 27.01.2026

EQUIVALENT MOMENT GRADIENT FACTOR FOR LATERAL-TORSIONAL BUCKLING OF WEB-TAPERED I-SECTION BEAMS

A.O. ILYUSHENKOV

Territorial Design Institute Khabarovskpromproekt JSC, Ussuriysky Blvd., 2, Khabarovsk, 680000, Russia

Abstract

Introduction. This paper studies the stability of symmetrical web-tapered I-beams subjected to unequal end moments. Taper angle, which plays a main role in the lateral-torsional buckling behavior of web-tapered beams, is investigated through refinement of differential equations of the original Vlasov technical theory for thin-walled bars. Analytical solutions of refined differential equations are given based on the Bubnov – Galerkin method through the law of change of moment of inertia of the cross section of the beam along its axis. The final bifurcation equation of elastic critical moment contains new terms that includes reduction coefficients of cross-section. Equivalent moment gradient factor for the full range of values is determined and given in closed form with respect to taper angle. Comparative graphs show alignment between analytical and numerical solutions. These results can be used to formulate efficient buckling criteria for prismatic and non-prismatic I-section beams and can be integrated into the current design methods.

Aim. To develop a unified equation for the equivalent moment gradient factor. Refine Vlasov technical theory for web-tapered I-section members.

Materials and methods. Refined Vlasov technical theory and Bubnov – Galerkin method were used in the work.

Results. Based on given refinements, a closed form of elastic lateral-torsional buckling solution of a web-tapered beam was obtained. Analytical calculation method is introduced.

Conclusions. The presented theoretical work introduces a unified design method for elastic critical moment and equivalent moment gradient factor determining for lateral-torsional buckling of web-tapered I-section beams. Results show an excellent agreement between numerical and analytical solutions. Equations are given in closed form similar to a constant cross-section but with additional factors and coefficients, that makes it possible to integrate the developed solution into existing calculation methods.

Keywords: lateral-torsional buckling, moment gradient factor, reduction, web-tapered members, steel beams, thin-walled rods, sectorial characteristic theory, differential equations, elastic critical bending moment, Bubnov – Galerkin method

For citation: Ilyushenkov A.O. Equivalent moment gradient factor for lateral-torsional buckling of web-tapered I-section beams. *Vestnik NIC Stroitel'stvo = Bulletin of Science and Research Center of Construction*, 2026, no. 1(48), pp. 56–73. (In Russian) [https://doi.org/10.37538/2224-9494-2026-1\(48\)-56-73](https://doi.org/10.37538/2224-9494-2026-1(48)-56-73)

Author contribution statement

The author takes responsibility for all aspects of the paper.

Funding

No funding support was obtained for the research.

Conflict of interest

The author declares no conflict of interest.

Received 12.12.2025

Revised 20.01.2026

Accepted 27.01.2026

Введение

При изучении вопроса изгибно-крутильной устойчивости балок возникло направление по возможности учета вида приложенной поперечной нагрузки в форме объединенного коэффициента. Впервые в работе M.G. Salvadori [1] возник подход, согласно которому балка, испытывающая изгиб от действия разных по знаку и значениям изгибающих моментов, может быть рассмотрена с помощью объединенного в одно общее решение коэффициента на основе формулы чистого изгиба балки. Так возник коэффициент влияния градиента изгибающего момента C_b . В работах J.W. Clark и H.N. Hill [2], D.A. Nethercot и K.C. Rockey [3], D.A. Nethercot и N.S. Trahair [4] вопрос коэффициента градиента эквивалентного момента получил развитие. Это привело к появлению обобщенного уравнения C_b , опирающегося непосредственно на вид эпюры изгибающего момента. Согласно данному подходу, вычисление увеличивающего коэффициента C_b производится по четырем точкам на эпюре изгибающих моментов в пределах расчетной длины рассматриваемого стержня. Этот метод получил большое распространение и был многократно апробирован. Он менялся и адаптировался нормами разных стран. И до сих пор является областью дискуссий и новых уточнений [5, 6]. Обобщающая статья [7] позволяет ознакомиться с этапами развития коэффициента и его практическим значением в расчете балок.

Z. Cywinski [8], Z.P. Bazant [9], S. Lonkar [10] и J. Naleszkiewicz [11] распространили техническую теорию В.З. Власова [12] на балки переменной жесткости. Z. Cywinski рассмотрел двутавровые стержни открытого профиля переменного сечения и привёл конечные дифференциальные уравнения, а также уравнения определения внутренних усилий нормальных и касательных напряжений. Z.P. Bazant, ссылаясь на Z. Cywinski, рассмотрел неравномерное кручение тонкостенных стержней открытого и закрытого профилей переменного сечения, в том числе с моносимметрией. S. Lonkar решил задачу изгиба с кручением тонкостенной балки с переменным открытым поперечным сечением методом конечных элементов. C.G. Culver и S.M. Pteg [13] использовали метод конечных разностей для разрешения дифференциального уравнения В.З. Власова для нахождения критического момента балок конической формы. П.И. Алексеев [14] привел решение для нахождения критической нагрузки полосы переменной жесткости при изгибе. N.S. Trahair [15] предложил вычислять упругий критический изгибающий момент балки переменной жесткости путем умножения уравнения упругого критического изгибающего момента при чистом изгибе M_{CR} балки постоянной жесткости на коэффициент переменности C_{br} и коэффициент градиента изгибающего момента C_b . В техническом отчете P. Nelson и T.M. Murray [16] разработаны аналогичные N.S. Trahair коэффициенты влияния изгибающего момента C_b и коэффициент переменности C_a , который зависит от угла наклона поясов. В работе подчеркивается сложность определения критического изгибающего момента при потере устойчивости по изгибно-крутильной форме при двойной кривизне. A.B. Venyamina и др. [17] приводят аналитическое решение критического изгибающего момента балки переменной жесткости не только с учетом места приложения поперечной нагрузки по высоте сечения, но и возможного случайного эксцен-

триситета из плоскости. Коэффициенты переменности сформулированы в виде полиномов при крутильной и секториальной жесткостях.

Материалы и методы

Текущее исследование начинается с уточнения системы дифференциальных уравнений тонкостенного стержня открытого профиля технической теории В.З. Власова [8]. При деформировании стержня возникают добавочные прогибы в горизонтальной и вертикальной плоскостях. Уравнения, описывающие перемещения по направлению осей O_x , O_y (рис. 1):

$$\begin{cases} u_s = u - (y - \alpha_y)\theta \\ v_s = v + (x - \alpha_x)\theta \end{cases} \quad (1)$$

где x и y – координаты поперечного сечения в плоскости и из плоскости

u и v – трансляционные перемещения по направлению x и y ;

θ – угол закручивания вокруг оси z ;

α_y и α_x – координаты центра изгиба (как это показано на рис. 1).

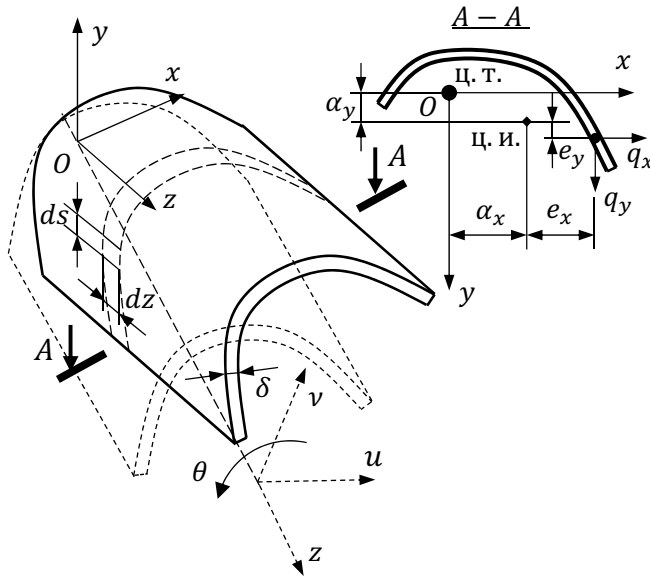


Рис. 1. Тонкостенный стержень открытого профиля
Fig. 1. Thin-walled rod with open cross-section

Исследование ограничивается рассмотрением симметричного двутавра, поэтому координаты центра изгиба совпадают с центром тяжести. В дальнейшем полагаем $\alpha_x = \alpha_y = 0$:

$$\begin{cases} u_s = u - y\theta \\ v_s = v + x\theta \end{cases} \quad (2)$$

Система уравнений (2) справедлива для призматических элементов. Для симметричного двутаврового элемента, у которого линейно изменяется высота стенки по длине (рис. 2), координата y определяется по закону:

$$y_z = y_1 \left(1 - \left(1 - \frac{h_0}{h_1} \right) \frac{z}{l} \right), \tag{3}$$

где $y_1 = 0,5h_1$;
 h_1 и h_0 – высота двутавра на левом и правом концах элемента;
 z – главная продольная ось;
 l – длина элемента.

$$\begin{cases} u_s = u - y_1 \left(1 - \left(1 - t_h \right) \frac{z}{l} \right) \theta, \\ v_s = v + x\theta, \end{cases} \tag{4}$$

где $t_h = h_0 / h_1$.

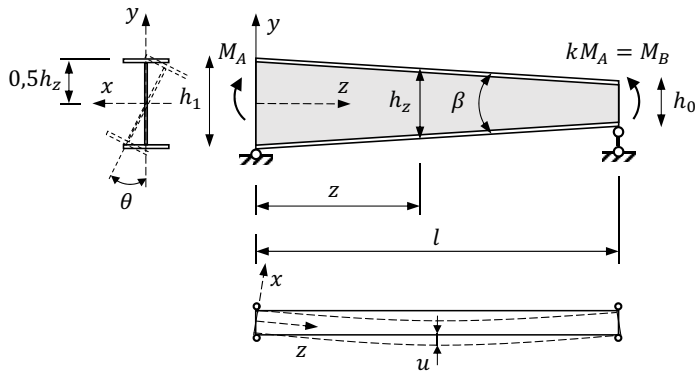


Рис. 2. Двутавровая балка с переменной высотой стенки, подверженная действию разных концевых изгибающих моментов

Fig. 2. Web-tapered I-section beam subjected to unequal end moments

Интенсивность нагрузки p_x формулируется через вторую производную перемещения u_s :

$$p_x = \sigma \delta u''_s, \tag{5}$$

где δ – толщина оболочки;
 σ – нормальные напряжения.

Подставляя (4) в (5), получим:

$$p_x = \sigma \delta u'' - \sigma \delta (y_z \theta)''. \tag{6}$$

Согласно формуле Лейбница, при вычислении производной произведения в (6) возникает дополнительно слагаемое:

$$p_x = \sigma \delta u'' - \sigma \delta (y'_z \theta + y_z \theta')' = y''_z \theta + 2 y'_z \theta' + y_z \theta'', \tag{7}$$

так как вторая производная $y''_z \theta = 0$:

$$p_x = \sigma \delta u'' - 2 \sigma \delta y'_z \theta' - \sigma \delta y_z \theta''. \tag{8}$$

Уравнение (8) отличается от призматического решения наличием члена, содержащего в себе угол конусности элемента β . Так как первая производная y_z (2):

$$y'_z = -y_1 (1 - t_1) / l = -0,5 (h_1 - h_0) / l = -0,5 \beta, \tag{9}$$

где β – угол конусности элемента (в радианах).

Тогда интенсивность нагрузки p_x с учетом угла конусности β :

$$p_x = \sigma \delta u'' + \sigma \delta \beta \theta' - \sigma \delta y_z \theta'' \quad (10)$$

Для получения интенсивности погонной поперечной нагрузки q_x потребуется проинтегрировать интенсивность нагрузки p_x . Интегралы вычисляются по переменной s для всего поперечного сечения кривой L :

$$q_x = u'' \int_L \sigma \delta ds + \theta' \beta \int_L \sigma \delta ds - \theta'' \int_L \sigma \delta y_z ds \quad (11)$$

Подставляя $\delta ds = dA_z$ в уравнение (11), перейдем к переменной площади тонкостенной оболочки dA_z :

$$q_x = u'' \int_{A_z} \sigma dA_z + \theta' \beta \int_{A_z} \sigma dA_z - \theta'' \int_{A_z} \sigma y_z dA_z \quad (12)$$

Нормальные напряжения в коническом элементе выражаются трехчленной формулой:

$$\sigma = -\frac{P}{A_z} - \frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_{x,z}} y_z \quad (13)$$

где I_y – момент инерции из плоскости наибольшей жесткости, который можно считать постоянным;

$I_{x,z}$ – момент инерции в плоскости наибольшей жесткости, который непрерывно изменяется по параболическому закону;

P – сжимающая сила, действующая вдоль z ;

M_y и M_x – изгибающие моменты, действующие относительно y и x .

Подставляя нормальные напряжения σ (13) в (12) и учитывая, что интегралы $I_{x,z} = \int_{A_z} y_z^2 dA_z$, $I_y = \int_{A_z} x^2 dA_z$, получим:

$$q_x = -Pu'' + P\beta\theta' - M_x\theta'' \quad (14)$$

Другое уточнение следует внести в уравнение приращения крутящего момента m_z относительно переменной s . Выражение для приращения крутящего момента включает интенсивности нагрузок p_y и p_x :

$$dm_z = [p_y x - p_x y_z] ds \quad (15)$$

где $p_y = \sigma \delta v'' + \sigma \delta x \theta''$ – интенсивность нагрузки относительно оси y в неизменном виде как для призматического стержня.

Подставим (10), нормальные напряжения σ (13) и $\delta ds = dA_z$ в уравнение приращения крутящего момента (15) и проинтегрируем относительно dA_z с учетом $r_z^2 = \frac{1}{P} \int_{A_z} \sigma x^2 dA_z + \frac{1}{P} \int_{A_z} \sigma y_z^2 dA_z$:

$$m_z = -M_x u'' - M_y v'' + M_x \beta \theta' - P r_z^2 \theta'' \quad (16)$$

Уточнения (14) и (16) подставляются в систему дифференциальных уравнений тонкостенного открытого профиля:

$$\begin{cases} EI_y u^{IV} + Pu'' + M_x \theta'' + P\beta\theta' = 0 \\ EI_{x,z} v^{IV} + Pv'' + M_y \theta'' = 0 \\ EI_{\omega,z} \theta^{IV} - GI_{t,z} \theta'' + M_x u'' + M_y v'' + Pr_z^2 \theta'' + q_x^0 e_x \theta + q_y^0 e_{y,z} \theta + M_x \beta \theta' = 0 \end{cases} \quad (17)$$

где E – модуль упругости;

G – модуль сдвига;

e_x – эксцентриситет, перпендикулярный оси x ;

$e_{y,z}$ – эксцентриситет, перпендикулярный оси y ;

$I_{\omega,z}$ – секториальный момент инерции;

$I_{t,z}$ – момент инерции при кручении;

r_z – полярный радиус инерции;

$\theta' = d\theta/dz$ – касательная деформация.

Переменность высоты стенки ведет к возникновению дополнительных нормальных и касательных напряжений. Нормальные напряжения развиваются по круговой поверхности и перпендикулярны наклону полки.

Из (17) получим дифференциальное уравнение четвертого порядка изгибно-крутильной формы потери устойчивости шарнирно-опертой балки, нагруженной поперечными силами Q_y , q_y и M_x , с учетом влияния угла конусности β :

$$EI_{\omega,z}\theta^{IV} - GI_{t,z}\theta'' - \frac{M_x^2}{EI_y}\theta + M_x''e_{y,z}\theta + M_x\beta\theta'. \quad (18)$$

Так как исследуется балка, подверженная действию только неравных концевых изгибающих моментов, в дальнейшем подразумеваем $M_x''e_{y,z}\theta = 0$.

В аналитическом методе Бубнова – Галеркина вначале следует задаться базисной функцией, которая зависит от кинематических граничных условий. Решение представляется в форме ряда, разложенного по базису:

$$\theta = \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(z), \quad (19)$$

где A_i – неизвестные постоянные коэффициенты;

$\varphi_i(z)$ – функция, удовлетворяющая граничным условиям задачи.

При подстановке ряда (19) в дифференциальное уравнение формы потери устойчивости (18) должно получиться тождество:

$$EI_{\omega,1} \sum_{i=1}^n f_{\omega} A_i \varphi_i^{IV}(z) - GI_{t,1} \sum_{i=1}^n f_t A_i \varphi_i''(z) - \frac{1}{EI_y} \sum_{i=1}^n M_x^2 A_i \varphi_i(z) + \beta \sum_{i=1}^n M_x A_i \varphi_i'(z) = 0, \quad (20)$$

где $f_{\omega} = (1 - b_{\omega} z)^2$ – функция изменения секториального момента инерции по длине стержня;

$$b_{\omega} = (1 - t_{\omega})/l;$$

$t_{\omega} = \sqrt{(I_{\omega,0}/I_{\omega,1})}$ – коэффициент отношения секториальных моментов инерции по концам стержня, для симметричных двутавров $t_{\omega} = t_h = h_0/h_1$;

$f_t = 1 - b_t z$ – функция изменения момента инерции при кручении по длине стержня;

$$b_t = (1 - t_t)/l;$$

$t_t = \sqrt{(I_{t,0}/I_{t,1})}$ – коэффициент отношения моментов инерции кручения.

Тождество (20) не будет нарушено в том случае, если его умножить на любую функцию $\varphi_k(z)$ и составить интеграл по всей длине стержня:

$$\int_0^l A_i \left(EI_{\omega,1} \sum_{i=1}^n f_{\omega} \varphi_i^{IV}(z) - GI_{t,1} \sum_{i=1}^n f_t \varphi_i''(z) - \frac{1}{EI_y} \sum_{i=1}^n M_x^2 \varphi_i(z) + \beta \sum_{i=1}^n M_x \varphi_i'(z) \right) \varphi_k(z) dz = 0. \quad (21)$$

Равенство (21) справедливо при любом $k = 1, 2, \dots, n$.

В канонической форме:

$$c_{k1}A_1 + c_{k2}A_2 + c_{k3}A_3 + \dots + c_{ki}A_n = 0, \quad (22)$$

$$\text{где } c_{ki} = \int_0^l \left(EI_{\omega,1} f_{\omega} \varphi_i^{IV}(z) - GI_{t,1} f_t \varphi_i''(z) - \frac{M_x^2}{EI_y} \varphi_i(z) + \beta M_x \varphi_i'(z) \right) \varphi_k(z) dz.$$

При интегрировании возникает система из n -го числа однородных алгебраических уравнений устойчивости при неизвестных коэффициентах:

$$\begin{cases} c_{11}A_1 + c_{12}A_2 + c_{13}A_3 + \dots + c_{1n}A_n = 0 \\ \dots \\ c_{n1}A_1 + c_{n2}A_2 + c_{n3}A_3 + \dots + c_{nn}A_n = 0 \end{cases}, \quad (23)$$

которую решаем путем приравнивания определителя к нулю размером $[n \times n]$:

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad (24)$$

Для шарнирно-опертого стержня при возможности свободно закручиваться (без стеснения деформации) за базисную функцию принимаем ряд синуса:

$$\varphi_i(z) = A_1 \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right) + A_2 \sin\left(\frac{2\pi z}{l}\right) \dots + A_i \sin\left(\frac{n\pi z}{l}\right). \quad (25)$$

Производные первого, второго и четвертого порядков: $\varphi_i^{IV} = A_i \frac{n^4 \pi^4}{l^4} \sin\left(\frac{n\pi z}{l}\right)$, $\varphi_i'' = -A_i \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sin\left(\frac{n\pi z}{l}\right)$, $\varphi_i' = A_i \frac{n\pi}{l} \cos\left(\frac{n\pi z}{l}\right)$.

Коэффициент канонического уравнения при подстановке (25):

$$c_{ki} = \begin{pmatrix} \frac{i^4 \pi^4}{l^4} EI_{\omega,1} \int_0^l (1 - b_{\omega} z)^2 \sin\left(\frac{i\pi z}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{l}\right) dz + \\ + \frac{i^2 \pi^2}{l^2} GI_{t,1} \int_0^l (1 - b_t z) \sin\left(\frac{i\pi z}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{l}\right) dz - \\ - M_A^2 \int_0^l \left(\frac{z}{l}(1+k) - 1\right)^2 \sin\left(\frac{i\pi z}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{l}\right) dz + \\ + \beta M_A \frac{i\pi}{l} \int_0^l \left(\frac{z}{l}(1+k) - 1\right) \cos\left(\frac{i\pi z}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{l}\right) dz \end{pmatrix}, \quad (26)$$

В результате интегрирования (26) получим:

$$c_{ki} = EI_y EI_{\omega,1} \frac{i^2 \pi^2}{l^4} (i^2 \pi^2 a_{\omega i} + \alpha a_{t i}) - M_A^2 a_{k i} \pm \beta M_A \frac{i\pi}{l} a_{k 2 i}, \quad (27)$$

где $\alpha = GI_{t,1} \times l^2 / EI_{\omega,1}$ – изгибно-крутильная характеристика балки, вычисляемая при наибольшем поперечном сечении балки;

$a_{\omega i} = a_{\omega}^i + b_{\omega}^i + c$ – коэффициент редукиции при секториальной жесткости;

$a_{i i} = a_{i}^i + b$ – редукиционный коэффициент при кручении;

$a_{k1i} = ak^2 + bk + c$ – коэффициент влияния изгибающего момента в призматической балке;

$a_{k2i} = ak + b$ – добавочный коэффициент влияния изгибающего момента, возникающий только в конической балке.

Изменение изгибающего момента происходит по линейному закону:

$$M_x = (M_A + M_B) \frac{z}{l} - M_A = M_A \left(\frac{z}{l} (1 + k) - 1 \right), \quad (28)$$

где $k = M_B/M_A$.

При этом важно подчеркнуть, что изменение изгибающего момента, как это показано на расчетной схеме (рис. 2), происходит на правом (меньшем) конце балки, и $k = -1$ считается чистым изгибом.

Результаты исследования

Удерживая пять членов ряда синуса, получим определитель матрицы $[5 \times 5]$, коэффициенты которого записаны в безразмерной форме:

$$D = \begin{vmatrix} m_1 - a_{31} - m_\beta a_{41} & m_2 - a_{32} - m_\beta a_{42} & m_3 - a_{33} + m_\beta a_{43} & m_4 - a_{34} - m_\beta a_{44} & m_5 - a_{35} + m_\beta a_{45} \\ m_6 - a_{32} + m_\beta a_{42} & m_7 - a_{36} - m_\beta a_{41} & m_8 - a_{37} - m_\beta a_{46} & m_9 - a_{38} + m_\beta a_{47} & m_{10} - a_{39} - m_\beta a_{48} \\ m_{11} - a_{33} - m_\beta a_{43} & m_{12} - a_{37} + m_\beta a_{46} & m_{13} - a_{310} - m_\beta a_{41} & m_{14} - a_{311} - m_\beta a_{49} & m_{15} - a_{312} + m_\beta a_{410} \\ m_{16} - a_{34} + m_\beta a_{44} & m_{17} - a_{38} - m_\beta a_{47} & m_{18} - a_{311} + m_\beta a_{49} & m_{19} - a_{313} - m_\beta a_{41} & m_{20} - a_{311} - m_\beta a_{411} \\ m_{21} - a_{35} - m_\beta a_{45} & m_{22} - a_{39} + m_\beta a_{48} & m_{23} - a_{312} + m_\beta a_{410} & m_{24} - a_{311} + m_\beta a_{411} & m_{25} - a_{311} - m_\beta a_{41} \end{vmatrix}, \quad (29)$$

где $a_{11} = 0,283t_\omega^2 + 0,434t_\omega + 0,283$; $a_{12} = -0,18t_\omega^2 + 0,18$; $a_{13} = 0,038t_\omega^2 - 0,076t_\omega + 0,038$; $a_{14} = -0,0144t_\omega^2 + 0,0144$; $a_{15} = 0,007t_\omega^2 - 0,014t_\omega + 0,007$; $a_{16} = 0,321t_\omega^2 + 0,358t_\omega + 0,321$; $a_{17} = -0,195t_\omega^2 + 0,195$; $a_{18} = 0,045t_\omega^2 - 0,09t_\omega + 0,045$; $a_{19} = -0,0184t_\omega^2 + 0,0184$; $a_{110} = 0,328t_\omega^2 + 0,344t_\omega + 0,328$; $a_{111} = -0,199t_\omega^2 + 0,199$; $a_{112} = 0,048t_\omega^2 - 0,096t_\omega + 0,048$; $a_{113} = 0,33t_\omega^2 + 0,34t_\omega + 0,33$ – коэффициенты редукции секториальной жесткости;

$a_{21} = 0,5t_l + 0,5$; $a_{22} = -0,18t_l + 0,18$; $a_{23} = -0,0144t_l + 0,0144$; $a_{24} = -0,195t_l + 0,195$; $a_{25} = -0,0184t_l + 0,0184$; $a_{26} = -0,199t_l + 0,199$ – коэффициенты редукции крутильной жесткости;

$a_{31} = 0,283k^2 - 0,434k + 0,283$; $a_{32} = -0,18k^2 + 0,18$; $a_{33} = 0,038k^2 + 0,076k + 0,038$; $a_{34} = -0,0144k^2 + 0,0144$; $a_{35} = 0,007k^2 + 0,014k + 0,007$; $a_{36} = 0,321k^2 - 0,358k + 0,321$; $a_{37} = -0,195k^2 + 0,195$; $a_{38} = 0,045k^2 + 0,09k + 0,045$; $a_{39} = -0,0184k^2 + 0,0184$; $a_{310} = 0,328k^2 - 0,344k + 0,328$; $a_{311} = -0,199k^2 + 0,199$; $a_{312} = 0,048k^2 + 0,096k + 0,048$; $a_{313} = 0,33k^2 - 0,34k + 0,33$ – коэффициенты градиента изгибающего момента балки постоянной жесткости;

$a_{41} = 0,5(1 + k)$; $a_{42} = 1,333(k - 1)$; $a_{43} = 0,75(1 + k)$; $a_{44} = 0,533(k - 1)$; $a_{45} = 0,416(1 + k)$; $a_{46} = 2,4(k - 1)$; $a_{47} = 1,333(1 + k)$; $a_{48} = 0,952(k - 1)$; $a_{49} = 3,429(k - 1)$; $a_{410} = 1,875(1 + k)$; $a_{411} = 4,444(k - 1)$ – добавочные коэффициенты градиента изгибающего момента балки переменной жесткости;

$M_{cr,1}^2 = n(\pi^2 a_{11} + \alpha a_{21})$; $M_{cr,2}^2 = n(16\pi^2 a_{12} + 4\alpha a_{22})$; $M_{cr,3}^2 = n(81\pi^2 a_{13} + 0)$; $M_{cr,4}^2 = n(256\pi^2 a_{14} + 16\alpha a_{23})$; $M_{cr,5}^2 = n(625\pi^2 a_{15} + 0)$; $M_{cr,6}^2 = n(\pi^2 a_{16} + \alpha a_{24})$; $M_{cr,7}^2 = n(16\pi^2 a_{17} + 4\alpha a_{25})$; $M_{cr,8}^2 = n(81\pi^2 a_{18} + 9\alpha a_{26})$; $M_{cr,9}^2 = n(256\pi^2 a_{19} + 0)$; $M_{cr,10}^2 = n(625\pi^2 a_{20} + 25\alpha a_{27})$; $M_{cr,11}^2 = n(\pi^2 a_{21} + 0)$; $M_{cr,12}^2 = n(16\pi^2 a_{22} + 4\alpha a_{28})$; $M_{cr,13}^2 = n(81\pi^2 a_{23} + 9\alpha a_{29})$; $M_{cr,14}^2 = n(256\pi^2 a_{24} + 16\alpha a_{30})$; $M_{cr,15}^2 = n(625\pi^2 a_{25} + 0)$; $M_{cr,16}^2 = n(\pi^2 a_{26} + \alpha a_{31})$; $M_{cr,17}^2 = n(16\pi^2 a_{27} + 0)$; $M_{cr,18}^2 = n(81\pi^2 a_{28} + 9\alpha a_{32})$; $M_{cr,19}^2 = n(256\pi^2 a_{29} + 16\alpha a_{33})$; $M_{cr,20}^2 = n(625\pi^2 a_{30} + 25\alpha a_{34})$; $M_{cr,21}^2 = n(\pi^2 a_{31} + 0)$; $M_{cr,22}^2 = n(16\pi^2 a_{32} + 4\alpha a_{35})$;

$M_{cr,23}^2 = n(81\pi^2 a_{112} + 0)$; $M_{cr,24}^2 = n(256\pi^2 a_{111} + 16\alpha a_{26})$; $M_{cr,25}^2 = n(625\pi^2 a_{113} + 25\alpha a_{21})$ – упругий критический момент балки переменной жесткости при чистом изгибе;

$$M_\beta = (\beta \times EI_y)/l; m_i = M_{cr,i}^2/M_A^2; m_\beta = M_\beta/M_A; n = \pi^2 EI_{\omega,1}/l^2; k = M_B/M_A.$$

Призматическая балка

Сначала разрешим вопрос коэффициента градиента эквивалентного изгибающего момента для балки постоянной жесткости. Для призматической балки в (29): $m_\beta = 0$; $a_{\omega 1} = a_{i1} = 1$. Если удерживаем только первое слагаемое в ряде синуса:

$$c_{k1} A_1 = 0, \quad (30)$$

$$a_{31} - m_1 = 0. \quad (31)$$

Откуда находим, что коэффициент, учитывающий дополнительное сопротивление продольному изгибу с кручением, когда нагрузка отличается от чистого изгиба:

$$C_b = \frac{M_A}{M_{cr}} = \sqrt{\frac{1}{a_{31}}} = \sqrt{\frac{1}{0,283k^2 - 0,434k + 0,283}}. \quad (32)$$

В (32) коэффициент a_{31} имеет табличное решение:

$$a_{k1i} = [a(1 - k)]^2 + [b(1 + k)]^2. \quad (33)$$

Коэффициенты a_{k1i} в определителе матрицы (27) всегда имеют симметричные числовые коэффициенты a и b . Если удерживается пять членов ряда (25), коэффициент (33) будет уточнен в области значений k , где эпюра изгибающих моментов меняет знаки и балка может потерять устойчивость по двум полуволнам вместо одной. При этом числовые коэффициенты перестают быть симметричными, поэтому их нельзя представить в форме табличного решения как (33), но возможно аппроксимировать.

M.G. Salvadori при рассмотрении задачи методом конечных разностей заметил, что кривые коэффициента C_b зависят от изгибно-крутильной характеристики балки. Для сортаментных двутавров с типовыми пролётами предсказывается верхняя граница значений C_b . Балки, у которых секториальная жесткость EI_ω мала, а изгибно-крутильная характеристика α стремится к достаточно большим значениям предсказывается нижняя граница C_b . Для проверки этого необходимо посчитать два случая: когда α имеет стандартное значение, и когда α стремится к очень большим значениям. Для этого рассмотрим прокатную балку 50Б1 и балку-полосу 660×12 мм пролетом 7 м. Характеристики балок приведены в табл. 1.

Используя определитель $[5 \times 5]$, находим уточнение:

$$a_{k1} = 0,273k^2 - 0,43k + 0,297. \quad (34)$$

Для балки-полосы:

$$a_{k1} = 0,26k^2 - 0,42k + 0,32. \quad (35)$$

На рис. 3а показаны кривые коэффициента C_b по (32), из определителя $[5 \times 5]$, а также значения, полученные методом конечных разностей в работах [18, 19]. Как видно, решение, основанное на $[1 \times 1]$, показывает завышенные результаты, но только лишь в определенной области $k = M_B/M_A$. Матрица $[5 \times 5]$ предсказывает значения с достоверной точностью. Для проверки в сводной табл. 2 приведен дополнительный расчет коэффициента в C_b ЛИРА-САПР. На рис. 3б показаны кривые C_b для балки-полосы, как видно, определитель $[5 \times 5]$ показывает серьезную разницу по сравнению с $[1 \times 1]$ и достигает 12–13 %.

Таблица 1

Геометрические характеристики балок

Table 1

Geometric characteristics of beams

Профиль	l , м	EI_y , кНм ²	$GI_{t,z}$, кНм ²	$EI_{\omega,z}$, кНм ⁴	α
50Б1	7	3258,8	34,7	185,1	9,2
660 × 12 мм	7	19,58	29,43	0,71	2032

Таблица 2

Численные и аналитические значения коэффициента C_b

Table 2

Numerical and analytical values of the C_b factor

k	C_b					
	Двутавровая балка 50Б1				Балка-полоса 660 × 12 мм	
	ЛИРА-САПР	[1 × 1]	[2 × 2]	[5 × 5]	[1 × 1]	[5 × 5]
-1	1					
-0,75	1,141					
-0,5	1,320					1,311
-0,25	1,550	1,563	1,549	1,549	1,563	1,522
0	1,844	1,879	1,845	1,840	1,880	1,771
0,25	2,200	2,281	2,195	2,192	2,281	2,049
0,5	2,578	2,704	2,576	2,565	2,704	2,325
0,75	2,843	2,927	2,854	2,824	2,927	2,574
1	2,731	2,752	2,713	2,712	2,752	2,556

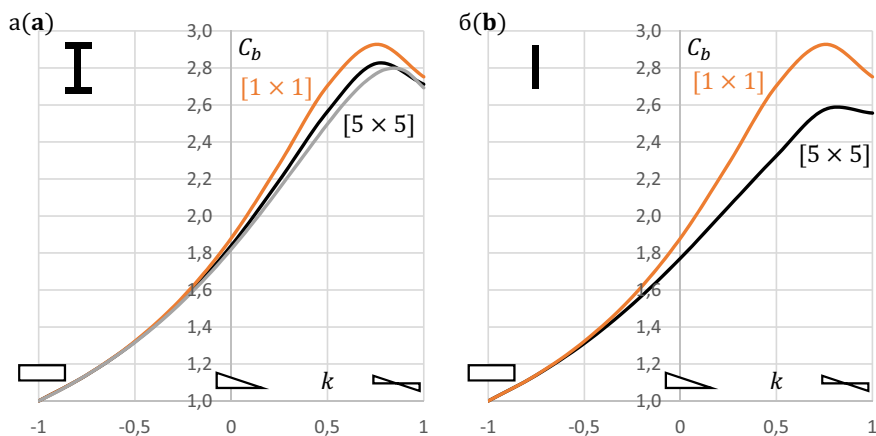


Рис. 3. Градиент эквивалентного изгибающего момента C_b двутавровой балки (а) и балки-полосы (б)
Fig. 3. Equivalent moment gradient factor C_b of I-section beam (a) and plate-section beam (b)

Несмотря на незначительные различия в числовых коэффициентах (34) и (35), кривые, которые показаны на рис. 4, демонстрируют существенные различия и, как верно отмечено M.G. Salvadori, образуют верхнюю и нижнюю границы результатов коэффициента градиента эквивалентного изгибающего момента C_b . Когда рассматривается (30), a_{k1} никак не связан с изгибно-крутильной характеристикой балки α . Но по мере увеличения размера определителя поправка от α становится более весомой, хотя и не демонстрирует особенных отличий в области потери устойчивости балки по одинарной кривизне. В связи с этим M.G. Salvadori определил безопасное значение $C_{b,lim} = 2,5$ с целью избежать возможных завышений.

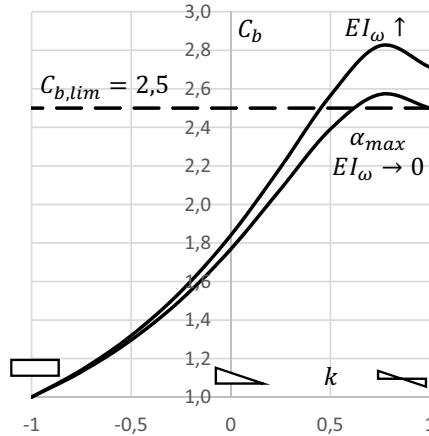


Рис. 4. Коэффициенты C_b для балки, подверженной неравным конечным моментам
 Fig. 4. C_b factors for a beam subjected to unequal end moments

Коническая балка

Теперь рассмотрим двутавровую сварную балку, показанную на рис. 2, со следующими принятыми геометрическими размерами: $t_f = 20$ мм, $b_f = 200$ мм, $h_{w,1} = 900$ мм, $h_{w,0} = 400$ мм, $t_w = 8$ мм. Пролет балки $l = 6$ м. Угол наклона поясов $\beta = 4,77^\circ$, или 0,083 рад. В табл. 3 приведены геометрические характеристики балки.

Таблица 3

Геометрические характеристики балки

Table 3

Geometric characteristics of the beam

$h_2, \text{ м}$	$EI_y, \text{ кНм}^2$	$GI_{t,z}, \text{ кНм}^2$	$EI_{\omega,z}, \text{ кНм}^4$	$t_\omega = \frac{h_0}{h_1}$	$t_t = \frac{I_{t,0}}{I_{t,1}}$
$h_1 = 0,4$	5497	97,6	1162,9	0,456	0,93
$h_2 = 0,2$		90,8	242,3		

Проверка осуществляется на оболочечной модели, построенной в ЛИРА-САПР. При расчете на устойчивость возникают локальные эффекты потери местной устойчивости по концам балки, поэтому на опорных участках ставятся вертикальные ребра минимальной толщины. Это приводит к некоторому завышению коэффициента запаса устойчивости. Результаты расчета сведены в табл. 4.

Численные и аналитические значения коэффициента C_b

Table 4

Numerical and analytical values of the C_b factor

k	C_b						
	ЛИРА-САПР	[1 × 1]	[2 × 2]	[3 × 3]	[4 × 4]	[5 × 5]	(46)
-1	1						
-0,75	1,161	1,132	1,147				1,152
-0,5	1,373	1,297	1,336				1,348
-0,25	1,653	1,509	1,580				1,604
0	2,006	1,776	1,899				1,925
0,25	2,397	2,094	2,267	2,246	2,244	2,242	2,274
0,5	2,683	2,394	2,588	2,542	2,537	2,533	2,505
0,75	2,615	2,510	2,614	2,524	2,507	2,500	2,441
1	2,190	2,334	2,222	2,119	2,097	2,089	2,138

На рис. 5а приведены кривые коэффициента градиента эквивалентного изгибающего момента из расчета в ЛИРА-САПР (пунктирная кривая), матрицы [1 × 1] (синяя кривая) и [5 × 5] (сплошная кривая черным цветом). Погрешность между кривыми составляет в среднем 6 %.

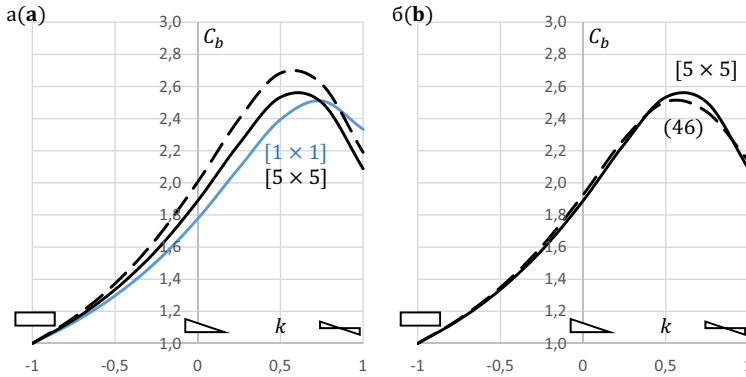


Рис. 5. Градиент эквивалентного изгибающего момента C_b балки при $\beta = 0,083$ рад
Fig. 5. Equivalent moment gradient factor C_b of a beam with $\beta = 0,083$ rad

Уравнение критического изгибающего момента балки с переменной высотой стенки

Если удерживается только первый член ряда синуса, получим квадратное уравнение:

$$EI_{\omega,1} \frac{\pi^4}{l^4} a_{11} + Gl_{t,1} \frac{\pi^2}{l^2} a_{21} - \frac{M_{cr}^2}{EI_y} a_{31} - M_{cr} \beta \frac{1}{l} a_{41} = 0. \tag{36}$$

Наименьший корень квадратного уравнения (36):

$$M_{cr} = -\beta \frac{EI_y a_{41}}{l a_{31}} + \sqrt{\left(\beta \frac{EI_y a_{41}}{l a_{31}}\right)^2 + \frac{1}{a_{31}} \frac{\pi^2}{l^4} EI_{\omega,1} EI_y (\pi^2 a_{11} + \alpha a_{21})}. \tag{37}$$

Сокращенно принято записывать критический изгибающий момент:

$$M_{cr} = C_b M_{0cr}, \tag{38}$$

где M_{0cr} – критический момент при чистом изгибе.

В (37) дополнительный изгибающий момент, возникающий из-за угла наклона поясов:

$$M_{\beta} = \beta \frac{EI_y}{l}. \quad (39)$$

Дополнительный коэффициент влияния градиента изгибающего момента:

$$C_{\beta} = \frac{a_{41}}{\sqrt{a_{31}}}. \quad (40)$$

Критический изгибающий момент балки переменной жесткости при чистом изгибе:

$$M_{0cr,\beta} = \frac{\pi\sqrt{EI_{\omega,1}EI_y}}{l^2} \sqrt{\pi^2 a_{11} + \alpha a_{21}}. \quad (41)$$

Подставим (39)–(41) в (37) и вынесем $C_b M_{0cr,\beta}$ из под корня:

$$M_{cr,\beta} = C_b M_{0cr,\beta} \sqrt{1 + \frac{M_{\beta}^2 C_{\beta}^2}{M_{0cr}^2}} - M_{\beta} C_b C_{\beta}. \quad (42)$$

Радикал в (42) раскладываем в степенной ряд, и видим, что вторым слагаемым возможно пренебречь в силу его малого влияния:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots = \sqrt{1 + \frac{b}{a^2}} \approx 1 + \frac{b}{2a^2} = 1 + \frac{M_{\beta}^2 C_{\beta}^2}{2M_{0cr}^2} \approx 1. \quad (43)$$

Тогда:

$$M_{cr,\beta} = C_b (M_{0cr,\beta} - M_{\beta} C_{\beta}). \quad (44)$$

Аппроксимация коэффициента градиента эквивалентного момент

Попробуем интерпретировать уравнение (44) в более простой форме. Пусть:

$$M_{cr,\beta} = C_{b,\beta} M_{0cr} = \sqrt{\frac{1}{a_{k1}^*}} M_{0cr}. \quad (45)$$

Из решения балки постоянной жесткости заимствуем уточненное выражение a_{k1} (34) и аппроксимируем его с включением в него выражения угла конусности балки β :

$$C_{b,\beta} = \sqrt{\frac{1}{a_{k1}^*}} = \sqrt{\frac{1}{\psi_2 \left(\left(\frac{1}{\psi_2} - 0,727 \right) k^2 - 0,43k + 0,297 \right)}}. \quad (46)$$

В (46) параметр ψ_2 приближено оценен:

$$\psi_2 = 1 - 1,1\beta. \quad (47)$$

Если $\psi_2 = 1$, уравнение (46) вернется к виду для балки постоянной жесткости (34).

Уточнение коэффициента редукции при секториальной жесткости

Из определителя (29) отчетливо видно, что коэффициентом редукции при кручении возможно пренебречь и принять $a_t = 1$. Из (41) явно выражаем коэффициент редукции a_ω :

$$a_\omega = \frac{M_{cr}^2 l^4}{\pi^4 E I_y E I_{\omega,1} C_b^2} - \frac{\alpha}{\pi^2}. \quad (48)$$

Произвольно выбираем балку и варьируем высоту так, чтобы параметр переменности изменялся $0 \leq t_\omega \leq 1$. Для каждого случая вычисляем M_{cr} и C_b из определителя $[5 \times 5]$ и строим зависимость $a_\omega - t_\omega$. По результатам такой работы получим аппроксимацию:

$$a_\omega = (0,4 + 0,6t_\omega)^2 = 0,36t_\omega^2 + 0,48t_\omega + 0,16. \quad (49)$$

Вместо (44) получили более компактное уравнение (45):

$$M_{cr,\beta} = \sqrt{\frac{1}{a_{k1}^*}} \times \frac{\pi \sqrt{E I_{\omega,1} E I_y}}{l^2} \times \sqrt{\pi^2 a_\omega + \alpha} \quad (50)$$

Проверим формулу (50) на балке из численного расчета с углом $\beta = 0,083$ рад.

$$t_\omega = \frac{h_0}{h_1} = 0,456; a_\omega = (0,4 + 0,6 \times 0,456)^2 = 0,454; \alpha = \frac{97,6 \times 6^2}{1162,9} = 3,02.$$

Критический момент при чистом изгибе:

$$M_{0cr} = \frac{\pi \sqrt{1162,9 \times 5497}}{6^2} \sqrt{\pi^2 \times 0,454 + 3,02} = 604 \text{ кНм.}$$

Расчет в ЛИРА-САПР показывает значение при чистом изгибе 599 кНм. На рис. 5б показаны кривые, полученные через аппроксимацию (50) и из решения матрицы $[5 \times 5]$ (29).

Рассмотрим другую балку, но с большим уклоном поясов $\beta = 10,48^\circ$ или 0,183 рад. Размеры поперечного сечения балки: $t_f = 12$ мм, $b_f = 250$ мм, $h_{w,1} = 1400$ мм, $h_{w,0} = 300$ мм, $t_w = 8$ мм. Пролет балки составляет $l = 6$ м. При таком угле следует ожидать достаточно сильной редукции a_ω . В табл. 5 приведены геометрические характеристики балки.

Таблица 5

Геометрические характеристики балки

Table 5

Geometric characteristics of the beam

$h_2, \text{ м}$	$E I_y, \text{ кНм}^2$	$G I_{t,2}, \text{ кНм}^2$	$E I_{\omega,2}, \text{ кНм}^4$	$t_\omega = \frac{h_0}{h_1}$	a_ω	α
$h_1 = 1,412$	6440	42,2	3209,9	0,221	0,284	0,473
$h_0 = 0,312$		27,1	156,7			

Критический изгибающий момент при чистом изгибе:

$$M_{0cr} = \frac{\pi \sqrt{3209,9 \times 6440}}{6^2} \sqrt{\pi^2 \times 0,284 + 0,473} = 718 \text{ кНм.}$$

Расчет в ЛИРА-САПР показывает значение при чистом изгибе 706 кНм. На рис. 6 приведены кривые, построенные через приближение (50) и из расчета на устойчивость в ЛИРА-САПР. Аппроксимация находится ниже, чем численная кривая. Но как это было

указано, происходит некоторое искажение коэффициента запаса устойчивости, когда балка теряет устойчивость по двум полуволнам. Ребра жесткости вносят определенные коррективы и несколько завышают значения.

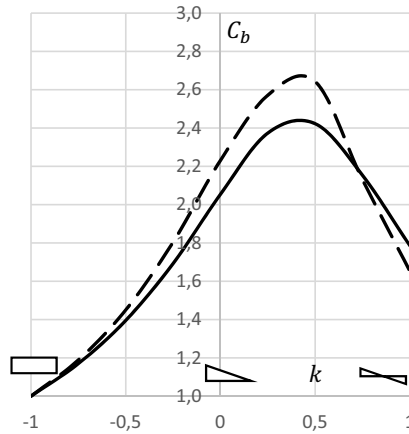


Рис. 6. Градиент эквивалентного изгибающего момента C_b балки при $\beta = 0,183$ рад
Fig. 6. Equivalent moment gradient factor C_b of a beam with $\beta = 0,183$ rad

Инженерный метод расчета конической и призматической балок на общую устойчивость

Расчет на устойчивость двутавровых стальных балок при изгибе в плоскости стенки, совпадающей с плоскостью симметрии сечения, следует выполнять по формуле:

$$\frac{M_x}{\varphi_b W_x R_y} \leq 1 \tag{51}$$

Коэффициент устойчивости при изгибе для симметричного профиля:

$$\varphi_b = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_T} = \frac{M_{cr} h_1}{2 I_{x,1} R_y} \gamma_c \tag{52}$$

С учетом $I_{o,1} = I_y h_1^2 / 4$ и подстановки (50) получим:

$$\varphi_b = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_T} = \gamma_c \times \frac{E I_y}{R_y I_{x,1}} \times \frac{h_1^2}{l^2} \times C_{b,\beta} \times \psi_0 \tag{53}$$

где $\psi_0 = \frac{\pi}{4} \sqrt{\pi^2 a_\omega + \alpha}$;

$$C_{b,\beta} = \sqrt{1/a_{k1}^*};$$

$\gamma_c = 0,87$ – коэффициент, учитывающий геометрические несовершенства в бифуркационном решении.

Заключение

По результатам проделанной работы представлено объединенное уравнение упругого критического момента $M_{0cr,\beta}$ и коэффициента эквивалентного градиента момента $C_{b,\beta}$ для

балок постоянной и переменной жесткостей. Уравнения (46) и (50) являются основой для выполнения расчета балок постоянной и переменной жесткостей двутаврового сечения на устойчивость. Решения могут быть интегрированы в нормативный метод расчета балок без нарушений связанности существующей методики.

Список литературы

1. Salvadori M.G. Lateral buckling of I-beams. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 1955, no. 1(120), pp. 1165–1177. Available at: https://archive.org/details/sim_american-society-of-civil-engineers-transactions_1955_120/page/1164/mode/2up.
2. Clark J.W., Hill H.N. Lateral buckling of beams. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 1962, no. 2(127), pp. 175–196. <https://doi.org/10.1061/taceat.0008498>.
3. Nethercot D.A., Rockey K.C. A Unified Approach to the Elastic Lateral Buckling of Beams. *Engineering Journal, American Institute of Steel Construction*, 1972, no. 3 (9), pp. 96–107. <https://doi.org/10.62913/engj.v9i3.188>.
4. Nethercot D.A., Trahair N.S. Lateral buckling approximation for elastic beams. *The Structural Engineer*, 1976, no. 6(54), pp.197–204.
5. Wong R., Driver R.G. Critical evaluation of equivalent moment factor. procedures for laterally unsupported beams. *Engineering Journal, American Institute of Steel Construction*, 2010, no. 1(47), pp. 1–20. <https://doi.org/10.62913/engj.v47i4.995>.
6. Nayak N., Anilkumar P., Subramanian L. Lateral-Torsional Buckling Modification Factors in Steel I-Shaped Members: Recommendations Using Energy-Based Formulations. *Engineering Journal, American Institute of Steel Construction*, 2024, no. 3(61), pp. 141–158. <https://doi.org/10.62913/engj.v61i3.1328>.
7. Zoruba S., Dekker B. A Historical and technical overview of the C_b coefficient in the AISC specifications. *Engineering Journal, American Institute of Steel Construction*, 2005, no. 3(42), pp. 177–187. <https://doi.org/10.62913/engj.v42i3.854>.
8. Cywinski Z. Skrecanie pretow cienkosciennych typu dwuteownika o zmiennej wysokosci srodnika. *Rozprawy Inzynierskie*, 1965, no. 2(13), pp. 269–280.
9. Bazant Z.P. Non-uniform torsion of thin-walled bars of variable cross section. *Association for Bridge and Structural Engineering Publications*, 1965, no. 25, pp. 17–40. Available at: https://www.researchgate.net/publication/297768535_Non-uniform_torsion_of_thin-walled_bars_of_variable_section.
10. Lonkar S. Bending and torsion of thin walled beams with variable, open cross sections. 1st. ed. The Institute of Structural Engineering ETH Zurich, 1968. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-4143-6>.
11. Naleszkiewicz J. Considerations on bending straight beams of variable cross section under action of external loads. *International Association for Bridge and Structural Engineering Proceedings*, 1948, no. 3, pp. 315–326.
12. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. Москва: Физматгиз; 1959.
13. Culver C.G., Prg J. S.M. Elastic stability of tapered beam-columns. *Journal of the structural division*, 1968, no. 2(94), pp. 455–470. <https://doi.org/10.1061/JSDEAG.0001884>.
14. Алексеев П.И. К определению критической нагрузки при изгибе полосы переменной жесткости // Строительная механика и расчет сооружений. 1963. № 6. С. 37–39.
15. Trahair N.S. Interaction buckling of tapered beams. *Engineering structures*, 2014, no. 62–63, pp. 174–180. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.01.040>.
16. Nelson P., Murray T.M. Development of simplified design methodology for tapered beams. *Progress report*. University of Oklahoma, USA; 1979.
17. Benyamina A.B., Meftah S.A., Mohri F., Daya E.M. Analytical solutions attempt for lateral torsional buckling of doubly symmetric web-tapered I-beams. *Engineering structures*, 2013, no. 56, pp. 1207–1219. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2013.06.036>.
18. Uzun E.T. Lateral torsional buckling of doubly symmetric I-shaped steel members under linear moment. *Pamukkale University Journal of Engineering Sciences*, 2019, no. 6(25), pp. 635–642. <https://doi.org/10.5505/pajes.2018.46656>.
19. Wang T. Overall Buckling and Ultimate Load of an H-Section Steel Member Under Combined Compression and Bending. *Journal of Asian Architecture and Building Engineering*, 2018, 3(17), pp. 511–518. <https://doi.org/10.3130/jaabe.17.511>.

References

1. Salvadori M.G. Lateral buckling of I-beams. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 1955, no. 1(120), pp. 1165–1177. Available at: https://archive.org/details/sim_american-society-of-civil-engineers-transactions_1955_120/page/1164/mode/2up.
2. Clark J.W., Hill H.N. Lateral buckling of beams. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 1962, no. 2(127), pp. 175–196. <https://doi.org/10.1061/taceat.0008498>.
3. Nethercot D.A., Rockey K.C. A Unified Approach to the Elastic Lateral Buckling of Beams. *Engineering Journal, American Institute of Steel Construction*, 1972, no. 3 (9), pp. 96–107. <https://doi.org/10.62913/engj.v9i3.188>.
4. Nethercot D.A., Trahair N.S. Lateral buckling approximation for elastic beams. *The Structural Engineer*, 1976, no. 6(54), pp.197–204.
5. Wong R., Driver R.G. Critical evaluation of equivalent moment factor. procedures for laterally unsupported beams. *Engineering Journal, American Institute of Steel Construction*, 2010, no. 1(47), pp. 1–20. <https://doi.org/10.62913/engj.v47i4.995>.
6. Nayak N., Anilkumar P., Subramanian L. Lateral-Torsional Buckling Modification Factors in Steel I-Shaped Members: Recommendations Using Energy-Based Formulations. *Engineering Journal, American Institute of Steel Construction*, 2024, no. 3(61), pp. 141–158. <https://doi.org/10.62913/engj.v61i3.1328>.
7. Zoruba S., Dekker B. A Historical and technical overview of the Cb coefficient in the AISC specifications. *Engineering Journal, American Institute of Steel Construction*, 2005, no. 3(42), pp. 177–187. <https://doi.org/10.62913/engj.v42i3.854>.
8. Cywinski Z. Skrecanie pretow cienkosciennych typu dwuteownika o zmiennej wysokosci srodnika. *Rozprawy Inzynierskie*, 1965, no. 2(13), pp. 269–280.
9. Bazant Z.P. Non-uniform torsion of thin-walled bars of variable cross section. *Association for Bridge and Structural Engineering Publications*, 1965, no. 25, pp. 17–40. Available at: https://www.researchgate.net/publication/297768535_Non-uniform_torsion_of_thin-walled_bars_of_variable_section.
10. Lonkar S. Bending and torsion of thin walled beams with variable, open cross sections. 1st. ed. The Institute of Structural Engineering ETH Zurich, 1968. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-4143-6>.
11. Naleszkiewicz J. Considerations on bending straight beams of variable cross section under action of external loads. *International Association for Bridge and Structural Engineering Proceedings*, 1948, no. 3, pp. 315–326.
12. Vlasov V.Z. Thin-Walled Elastic Rods. Moscow: Fizmatgiz Publ.; 1959. (In Russian)
13. Culver C.G., Preg Jr. S.M. Elastic stability of tapered beam-columns. *Journal of the structural division*, 1968, no. 2(94), pp. 455–470. <https://doi.org/10.1061/JSDEAG.0001884>.
14. Alekseev P.I. On the determination of the critical bending load of a plate-section beam with variable cross section. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*, 1963, no. 6, pp. 37–39. (In Russian)
15. Trahair N.S. Interaction buckling of tapered beams. *Engineering structures*, 2014, no. 62–63, pp. 174–180. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.01.040>.
16. Nelson P., Murray T.M. Development of simplified design methodology for tapered beams. *Progress report*. University of Oklahoma, USA; 1979.
17. Benyamina A.B., Meftah S.A., Mohri F., Daya E.M. Analytical solutions attempt for lateral torsional buckling of doubly symmetric web-tapered I-beams. *Engineering structures*, 2013, no. 56, pp. 1207–1219. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2013.06.036>.
18. Uzun E.T. Lateral torsional buckling of doubly symmetric I-shaped steel members under linear moment. *Pamukkale University Journal of Engineering Sciences*, 2019, no. 6(25), pp. 635–642. <https://doi.org/10.5505/pajes.2018.46656>.
19. Wang T. Overall Buckling and Ultimate Load of an H-Section Steel Member Under Combined Compression and Bending. *Journal of Asian Architecture and Building Engineering*, 2018, 3(17), pp. 511–518. <https://doi.org/10.3130/jaabe.17.511>.

Информация об авторе / Information about the author

Александр Олегович Ильюшенко, инженер промышленного и гражданского строительства, АО «Территориальный проектный институт «Хабаровскпромпроект», Хабаровск
e-mail: revivaltree@gmail.com

Alexander O. Ilyushenkov, Civil and Industrial Engineer, Territorial Design Institute Khabarovskpromproekt JSC, Khabarovsk
e-mail: revivaltree@gmail.com